*

Livsløp, utvalgsstrukturer og ordningsrelasjoner

*

Morten Rognes

1980

*

INNHOLD

Del I
.....
5
§1 En teori om livsløp, det ideelt gode liv og verdener som er bedre enn andre.
.....
6
§1.1 Språket til TML.
.....
10
§1.2 Ikke-logiske aksiomer i teorien TML
.....
11
§1.3 Innledende kommentarer til aksiomene i TML
.....
13
§1.4 Kommentarer til de tidsteoretiske aksiomene
.....
14
§1.5 Kommentarer til aksiomene om historisk likhet mellom mulige verdener. Sammenfall mellom mulige verdener ved et gitt tidspunkt.
.....
14
§1.6 Vedrørende handlingsalternativer som er forbudt, påbudt og tillatt.
.....
15
§1.7 Setninger som belyser strukturen til relasjonen B.
.....
19
§1.8 En kvantitativ teori om verdiforholdene mellom mulige verdener.
.....
28
§2 Andre mulige aksiomer.
.....
31
§3 Deontiske operatorer i TML
.....
33
§4 Flere satser i teorien TML.
.....
40
Del II

.....
65
Om ordningsrelasjoner, utvalgsfunksjoner og preferanselogiske systemer
.....
65
§0 Innledning
.....
66
§1 M-utvalgsstrukturer og preferanserelasjoner.
.....
71
§2 Det setningslogiske språket L;m og modeller for dette.
.....
72
§2.1 Modeller for språket L;m
.....
72
§3 Det logiske systemet M.
.....
73
§3.1 Gyldighetsteoremet for logikken M.
.....
74
§3.2 Fullstendighetsproblemet for logikken M
.....
75
§ 3.3 Klassen av preferanseteoretiske modeller for L;m
.....
82
§ 3.3.1 Fullstendigheten til M med hensyn på de preferanseteoretiske modellene.
.....
83
§4 Om komponenten Q i de preferanseteoretiske modellene for L;m
.....
84
§4.1 Kalkylen M+
.....
85
§ 4.2 Kalkylen M++
.....
86
§5 Om sammenhengen mellom M - systemene og noen andre preferanselogiske systemer.
.....
88

§5.1 En utvidelse av språket L:m med to nye binære operatorer Pr og Ekv. 89
§5.2 Systemet P0-Det 98
§6 Preordninger 100
§6.1 Preordningsmodeller. 105
§6.2 Om ytterligere krav som kan stilles til M-utvalgsstrukturer. 106
§7 Syntaktiske derivasjoner. 109
§8 Sammenhengen mellom operatoren Max og operatorene Pr, Ekv og Pr* 114
§9 En syntaktisk deduksjon av P0-Det fra systemet M++:u 118
§10 Om en bestemt type av utvalgsstrukturer, P-strukturer, og om eksistensen av underliggende preferanserelasjoner i denne typen av strukturer. 120
§11 Avsluttende bemerkninger. 124
Referanser 125

Del I

En teori om mulige livsløp

§1 En teori om livsløp, det ideelt gode liv og verdener som er bedre enn andre.

Dette arbeidet består av to deler. I den foreliggende del av arbeidet skal vi gi en detaljert fremstilling av en teori som det ikke er så lett å gi noe helt treffende navn, men som her vil bli kalt "Teorien om mulige livsløp", forkortet "TML". Det bør understrekes at det forutsettes at leseren er fullt ut fortrolig med Rognes [1] og Rognes [2] som gir en tilstrekkelig detaljert redegjørelse for den begrepsapparatur og notasjon som vil bli benyttet her.

Hensikten med dette arbeidet er først og fremst å gi en detaljert og presis definisjon, presentasjon og dokumentasjon av denne teorien TML. Gitt dette kan den oppfattes som et studieobjekt som kan gjøres til gjenstand for videre utforskning. Teorien er imidlertid temmelig kompleks og vi har ennå ikke fått tid til en utførlig granskning av den. Det må derfor understrekes at dette arbeidet ennå befinner seg på forsøksstadiet og i sin begynnelse. Det er derfor fullt mulig at vi etterhvert vil formulere dyptgående revisjoner av teorien, eller at den faktisk vil bli gitt opp som mer eller mindre ufruktbar.

Teorien TML er en første-ordens teori som er en utvidelse av teorien T;1, teorien om presise deskriptive utsagn, som er beskrevet detaljert og utførlig i Rognes [2]. En fullstendig presis definisjon av teorien TML vil være gitt om vi angir nøyaktig hvilke ikke-logiske predikater som inngår i språket til den og nøyaktig hvilke ikke-logiske aksiomer som inngår i den. Når det gjelder språket til TML vil dette bli avgrenset helt presist i neste paragraf, §1.1. De ikke logiske aksiomene vil bli innført og avgrenset i §1.2

Vi skal imidlertid først gjøre et forsøk på å gi et sammendrag av teorien på en mer uformell måte, uten spesiell bruk av formalisering, og herunder forsøke å få frem hva som er poenget med den. La oss først gi en oversikt over de viktigste grunnbegrepene i teorien.

Vi tar vår utgangspunkt i en mengde med mulige verdener I. Det er tanken at I er mengden av alle logisk mulige verdener. Videre tenker vi oss at T er mengden av alle tidspunkter og at disse er ordnet lineært og tett ved hjelp av relasjonen "t er et tidspunkt som kommer før tidspunktet t'". Klassen av tidspunkter og ordningsrelasjonen mellom dem forutsettes i dette arbeidet å være invariant med hensyn på de logisk mulige verdenene. Når det gjelder de mulige verdenene impliserer teorien at det for hvert tidspunkt t kan være slik at at det finnes to mulige verdener hvor nøyaktig det samme har skjedd opp til og inkludert tidspunktet t, med andre ord, som er historisk identiske opp til og inkludert tidspunktet t. I teorien TML antas det at relasjonen: "w er historisk identisk med w' opp til og inkludert tidspunktet" er en ekvivalensrelasjon over mengden av de logisk mulige verdenene.

Ved siden av mengden av mulige verdener, klassen av tidspunkter, ordningsrelasjonen "kommer før" mellom tidspunktene, og relasjonen historisk identitet, inngår ytterligere noen grunnbegreper i teorien: Vi antar at dersom x er en person, t et tidspunkt og w en logisk mulig verden så finnes mengden av alle de handlingsalternativene som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w. Mengden av alle de handlingsalternativene som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w betegnes med "A;(x,t)(w)". Av alle de handlings-alternativene som står åpne for en person vil det være ett som vedkommende realiserer. Relasjonen "h er et handlingsalternativ som x fra og med tidspunktet t realiserer i verdenen w" er derfor et grunnbegrep i den teorien som fremlegges her. Et annet viktig grunnbegrep er den relasjonen som består mellom to handlingsalternativer h;1 og h;2 hvis og bare hvis h;1 er et handlingsalternativ som det er minst like bra at x realiserer i verdenen w fra og med tidspunktet t som alternativet h;2. Endelig antas det også at de logisk mulige verdenene kan ordnes med hensyn på relasjonen "minst like bra som". Denne relasjonen mellom verdenene tas også som et primitivt begrep og den betegnes med "B". Det drøftes om det er rimelig å anta at denne relasjonen ikke bare er en preordning, men også en total preordning, dvs. en

preferanserelasjon over mengden av mulige verdener. Dermed har vi gitt en oversikt over de viktigste grunnbegrepene i TML.

La oss nå se på de mer grunnleggende teoretiske påstandene som inngår i teorien. Når det gjelder handlingsalternativer antar teorien det følgende: Er h et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w så vil også h være et handlingsalternativ som står åpent for x ved t i enhver verden som er historisk identisk med w opp til, og inkludert, tidspunktet t. For det andre postulerer teorien at dersom to handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w er distinkte, finnes det ingen logisk mulig verden hvor x fra og med tidspunktet t realiserer begge alternativene. Videre antar teorien at dersom h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w finnes det en eller annen logisk mulig verden som er historisk identisk med w opp til og inkludert tidspunktet t og hvor det er slik at x realiserer h fra og med tidspunktet t. Endelig er det en grunnleggende påstand i teorien at dersom det finnes handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i en verden w så er det slik at x realiserer et eller annet av disse alternativene som er åpne fra og med t i denne verdenen w.

Når det gjelder relasjonen "minst like bra som" mellom handlings-alternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i en verdenen w er det en grunnpåstand i teorien at denne relasjonen er refleksiv og transitiv, mao. en preordning. Vi diskuterer imidlertid også om det ikke kan være rimelig å anta at den er total. Videre antas det i teorien at det følgende holder om denne relasjonen: Er påstanden at h;1 et handlingsalternativ som er minst like bra for x ved t i verdenen w som h;2 sann så er også den tilsvarende påstand, nemlig den man får når w erstattes med en annen verden w' som er historisk identisk med w opp til og inkludert tidspunktet t, sann.

Vi har nå gitt en uformell oversikt over de mest grunnleggende påstandene som særpreger TML. Siden TML er en utvidelse av teorien T;1 er selvfølgelig alle aksiomene i T;1 også aksiomer i TML. La oss minne om at de aksiomene som inngår i T;1 er de følgende: For det første dreier det seg om et standardaksiomsett for kvantifikasjonsteori med identitet. For det andre dreier det seg om aksiomene i mengdelæren ZFC;u, – en versjon av Zermelo-Fraenkel systemet for mengdelære som tillater eksistensen av såkalte urindivider. For det tredje dreier det seg om de aksiomene om utsagn og mulige verdener som er spesielle for teorien T;1. Det har imidlertid ikke vært hensikten å gi et sammen-drag av disse aksiomene her. I denne forbindelse henvises leseren til de arbeidene som ble nevnt ovenfor. Det bør også understrekes at teorien på langt nær er noen "fullstendig" teori. Når det gjelder f.eks. "minst like bra som"-relasjonen mellom mulige verdener er det mulig å utvide teorien i forskjellige retninger med langt flere antagelser.

Teorien TML er av en viss interesse fordi en rekke begreper av moralfilosofisk natur kan defineres innenfor den. Det er i så fall mulig å se hva som innenfor teoriens rammer følger fra forskjellige påstander som inneholder disse begrepene. La oss se på en del viktige begreper som kan introduseres.

For det første kan man definere hva som menes med at h er et handlingsalternativ som det er en plikt å utføre for x ved tidspunktet t i verdenen w. Det virker fornuftig å hevde at dette er tilfelle hvis og bare hvis h er et handlingsalternativ som er bedre enn alle de andre alternativene som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w. Videre virker det rimelig å hevde at h er et handlingsalternativ som det er tillatt for x å utføre ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis h er blandt de beste alternativene som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w. Endelig er det naturlig å si at et handlingsalternativ er forbudt for x hvis og bare hvis h er et handlingsalternativ som ikke er blandt de beste av dem som står åpne for x.

Gitt disse begrepene er det mulig å innføre andre som kan være av interesse og som det kan bevises satser om innenfor teoriens rammer. Et slikt begrep er begrepet "livsløp".

La w være en logisk mulig verden og x et eller annet individ. Vi betrakter den funksjonen L;(x,w) som til hvert tidspunkt t der A;(x,t)(w)≠ ø tilordner det ordnete paret <a;t,b;t> hvor a;t er mengden av alle de handlingsalternativene som x har ved tidspunktet t i verdenen w, og hvor b;t er det av disse alternativene som x realiserer fra og med t i verdenen w. Merk at L;(x,w) ikke nødvendigvis er definert over hele T. Men vi har selvfølgelig at domenet til L;(x,w) er inkludert i T. Funksjonen L;(x,w) kunne kalles for det totale livsløpet til x i verdenen w. Kjente man denne funksjonen i detalj, og hadde man en fullstendig oversikt over den, ville man kjenne til alle de alternativene som sto åpne for x i verdenen w og hvilke av disse som x realiserte. Sagt på en annen måte ville man i så fall ha en full oversikt over x's liv i denne verdenen. Det er selvfølgelig fordi den teorien som har blitt skissert kan sies å gi en – og faktisk gir en – informasjon av rent logisk natur om livsløp i denne forstand at vi har valgt å kalle den "en teori om logisk mulige livsløp".

Det er også mulig å innføre modaloperatorer i teorien TML. Anta w er en logisk mulig verden og at H;(t,w) er mengden av alle de logisk mulige verdenene som som er historisk identiske med verdenen w opp til og inkludert tidspunktet t. La u være et utsagn som er sant i de beste av alle de verdenene som er med i H;(t,w). Det synes da rimelig å si at utsagnet u i en viss forstand beskriver et forhold som ideelt sett bør eller skal være tilfelle i verdenen w relativt til tidspunktet t. Man kan altså i denne forbindelse innføre en modalfunksjon Skal@ som til ethvert tidspunkt t og ethvert utsagn u tilordner et utsagn Skal@;t(u) ved å stipulere at utsagnet Skal@;t(u) skal regnes som sant i en verden w hvis og bare hvis utsagnet u er sant i alle de beste verdenene i H;(t,w). Gitt denne operatoren kan man så definere den korresponderende duale tillatelses-operatoren Til@ ved

Til@;t(u) = Neg(Skal@;t(Neg(u))

Et interessant spørsmål som oppstår i denne forbindelse er hvordan f.eks. relasjonen "h er et handlingsalternativ som det er x plikt å realisere fra og med tidspunktet t" og de tilsvarende andre relasjonene som ble nevnt ovenfor er relatert til modaloperatoren Skal@ og de andre modaloperatorene som kan defineres ved hjelp av denne. Det viser seg at man ikke uten videre kan bevise noen interessante satser om dette i TML slik den så langt er skissert. Vi betrakter derfor muligheten av å utvide teorien med ytterligere noen ikke-logiske aksiomer som relaterer relasjonen "minst like bra som" mellom mulige verdener til relasjonen "minst like bra som" mellom handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w. Disse ikke-logiske aksiomene kan formuleres innenfor språkrammen til TML og vi betegner dem med P1 – P3.

La oss på dette punkt gjøre rede for hva det første av disse prinsippene sier i mer uformelle ordelag. Anta h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w. Med realiseringsmengden til h relativt til triplet <x,t,w> menes mengden av alle de logisk mulige verdenene som er historisk identiske med w opp til og inkludert tidspunktet t og hvor det er slik at x fra og med tidspunktet t realiserer alternativet h.

Prinsippet P1 sier da at alternativet h;1 er minst like bra som alternativet h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis de beste verdenene i realiseringsmengden til h;1 relativt til <x,t,w> er minst like bra som de beste elementene i realiseringsmengden til h;2 relativt til <x,t,w>.

Prinsippet P2 sier at alternativet h;1 er bedre enn alternativet h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis de beste verdenene i realiseringsmengden til h;1 relativt til <x,t,w> er bedre enn de beste elementene i realiseringsmengden til h;2 relativt til <x,t,w>.

Endelig uttrykker prinsippet P3 at alternativet h;1 er akkurat like bra som alternativet h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis de beste verdenene i realiseringsmengden til h;1 relativt til <x,t,w> er akkurat like bra som de beste elementene i realiseringsmengden til h;2 relativt til <x,t,w>.

Ved hjelp av disse prinsippene kan man så bevise en rekke satser som relaterer de tre predikatene "h er et handlingsalternativ som det er en plikt for x å utføre fra og med tidspunktet t i verdenen w", "h er et handlingsalternativ som det er tillatt for x å utføre fra og med tidspunktet t i verdenen w" og "h er et handlingsalternativ som det er forbudt for x å utføre fra og med tidspunktet t i verdenen w" til de deontiske operatorene vi nevnte ovenfor. Man kan f.eks. vise under visse nærmere angitte forutsetninger at h er et handlingsalternativ som det er påbudt for x å utføre fra og med tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis det er slik at utsagnet som sier at det skal være slik at x fra og med t realiserer alternativet h er sant i verdenen w.

Viktigheten og poenget med disse satsene er det følgende. For det første viser de til visse sammenhenger mellom begreper som på den ene side dreier seg om det som skal gjøres ("Tunsollen") og begreper som på den andre side dreier seg om det som skal være ("Seinsollen"). De predikatene som ble nevnt ovenfor og som hadde med handlingsalternativer å gjøre er av den første typen. De deontiske modaloperatorene som ble nevnt representerer begreper av den sistnevnte typen. For det andre viser også satsene hvordan studiet av preferanselogikk kan knyttes til studiet av deontiske operatorer. For det tredje antyder satsene sammenhenger mellom teorier som gir en ytterligere karakteristikk av relasjonen "h;1 er et handlingsalternativ som er minst like bra som h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w", som f.eks. de konsekvensetiske teoriene som har blitt formulert i Rognes [10] og studiet av deontisk logikk.

Sammenfattende kan man si at teoremene derfor kaster lys over sammenhenger som består mellom disiplinene konsekvensetikk, preferanse-logikk og deontisk logikk. I denne forbindelse bør det neves at å få frem eventuelle mulige sammenhenger av dette slag har vært hovedformålet med denne delen av dette arbeidet.

Vi har nå gitt et uformelt sammendrag av den teorien vi ønsker å presentere mer nøyaktig etterhvert: "Teorien om mulige livsløp" eller TML. La oss nå gi en oversikt over selve innholdet i den første delen av dette arbeidet. I §1.1 gir vi en eksakt definisjon av språket til teorien. Dette er et vanlig første ordens språk der det logiske vokabularet er utvidet med visse nye ikke-logiske predikater som er eksplisitt listet opp i denne paragrafen. I §1.2 spesifiserer vi så de ikke-logiske aksiomene i teorien og gir en fullstendig av den. §1.4 – 1.8 inneholder kommentarer til de grunnleggende aksiomene i teorien samt betraktninger over hvordan den kan utvides ytterligere i forskjellige retninger. I §1.4 gir vi ytterligere noen kommentarer til de rent "tidsteoretiske" aksiomene. Når det relasjonen "Verdenen w er historisk identisk med verdenen w' opp til og inkludert tidspunktet t", som forkortes med "Hist;t(w,w')", diskuteres denne nærmere i §1.5. Vi viser her at denne kan defineres ved hjelp av relasjonen "Verdenen w;1 sammenfaller med verdenen w;2 ved tidspunktet t" – "Coins;t(w,w')". I denne paragrafen diskuteres også en rekke aksiomer som det kan være naturlig å betrakte i forbindelse med den sistnevnte relasjonen. Man får en teori som er sterkere enn TML om man erstatter aksiomene for "Hist;t(w,w')" med aksiomene for sammenfall-relasjonen "Coins;t(w,w')". I visse henseende er denne sterkere teorien å foretrekke fremfor TML. I §1.6 viser vi hvordan predikatene "h er et handlingsalternativ som det er en plikt for x å utføre fra og med tidspunktet t i verdenen w", "h er et handlingsalternativ som det er tillatt for x å utføre fra og med tidspunktet t i verdenen w" og "h er et handlingsalternativ som det er forbudt for x å utføre fra og med tidspunktet t i verdenen w" kan defineres ved hjelp av "minst like bra som" relasjonen mellom handlingsalternativer. I §1.7 kommenteres relasjonen "minst like bra som" mellom mulige verdener, dvs. relasjonen B, mer utførlig. En rekke nye aksiomer om denne relasjonen som TML kan utvides med diskuteres. Ytterligere et skritt i denne retning tas i §1.8 hvor en kvantitativ teori om verdiavstander mellom logisk mulige verdener tas opp

til drøftelse. I §2 tar vi for oss "broprinsippene" P1 – P3 som forbinder relasjonene "B(w,w')" og "Mb;<x,t,w>(h,h')". I denne paragrafen formuleres disse prinsippene eksakt. Det bør bemerkes at disse setningene ikke offisielt er inkludert som ikke-logiske aksiomer i teorien TML. Men konjunksjonen av dem brukes som "hypotese" i de teoremene hvor vi har behov for dette. Deontiske operatorer introduseres i §3 hvor det også nevnes og delvis bevises en rekke satser om disse som kan formuleres innenfor teoriens rammer. Endelig beviser vi i §4 en rekke satser som relaterer handlingsalternativ-predikatene i teorien til de deontiske operatorene vi nevnte og forøvrig til relasjonen B mellom mulige verdener.

Dermed skulle vi ha gitt forholdsvis detaljert oversikt over innholdet i de følgende paragrafer.

§1.1 Språket til TML.

Språket til teorien TML er språket til utsagnsteorien T;1, definert i Rognes [2], utvidet med de følgende nye ikke-logiske predikater som vi nå gir en liste over. Symbolene til høyre på denne listen er de symboler som vi vil bruke som forkortelser for dem til venstre:

(1) "h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Alt;w(h,x,t)"
(2) "h;1 er et handlingsalternativ som er minst like bra som h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)"
(3) "h er et handlingsalternativ som x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w" – "Re;w(h,x,t)"
(4) "w;1 er en mulig verden som er minst like bra som verdenen w;2" – "Br(w;1,w;2)"
(5) "Verdenen w;1 er historisk identisk med verdenen w;2 opp til og inkludert tidspunktet t" – "Hist;t(w;1,w;2)"
(6) "t er et tidspunkt" – "Tp(t)"
(7) "t er et tidspunkt som kommer før tidspunktet t' " – "t<t'"

Dermed er språket til TML fullstendig definert.

Siden dette språket er en utvidelse av språket til T;1 skal vi imidlertid minne om enkelte symboler som brukes i forbindelse med denne siste teorien og som vi fritt vil benytte oss av her. I det følgende brukes "I" som navn på mengden av alle logisk mulige verdener. "U" betegner mengden av alle presise deskriptive utsagn. "True(w,x)" betyr at w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant. Klassen av alle de mulige verdener hvor et utsagn x er sant kalles for sannhetsmengden til x og betegnes med "s(x)". Den funksjonen som til ethvert utsagn tilordner utsagnet dets sannhetsmengde betegnes her med "s". Den omvendte funksjonen, funksjonen som til enhver mengde med mulige verdener tilordner denne det utsagnet som har den mengden som sin sannhetsmengde betegnes med "s;-1". Vi gjør oppmerksom på at variabeltegnene i språket er helt generelle og av bare en type. Offisielt dreier det seg om tegnene i den følgende rekke: "x", "y", "z", "w", "x'", "y'", ... Imidlertid vil vi, fordi det i en rekke sammenhenger er mer suggestivt, bruke "w", "w'", "w;1", "w;2" etc. som variabeltegn som tar mulige verdener som verdier. "t", "t'","t;1", "t;2" etc. vil bli brukt som variabeltegn for tidspunkter. Endelig brukes "h", "h'", "h;1", "h;2", etc. som variabeltegn som tar handlingsalternativer som verdier.

Vi innfører de følgende uttrykk, nemlig "B", "B*", "Max(B,a)", "L" og "Be;<w,x,t>(h;1,h;2)" ved den følgende definisjon:

Definisjon 1

(i) B = Mg(<w,w'>: Br(w,w'))
(ii) B* = Mg(<w,w'>: Br(w,w') & ¬Br(w',w))
(iii) Max(B, a) = Mg(w: wêa & (Ay)(yêa –> Br(w,y))
(iv) L = Mg(<w;1,w;2>: Br(w;1,w;2) & Br(w;2, w;1))
(v) Be;<w,x,t>(h;1,h;2) <–> (Mb;<w,x,t)(h;1,h;2) & ¬ Mb;<w,x,t)(h;2,h;1))
(vi) A;(x,t)(w) = Mg(h: Alt;w(h,x,t))
(vii) T = Mg(t: Tp(t))

Fra denne definisjonen fremgår det at B er en relasjon som består mellom to mulige verdener hvis og bare hvis den første verdenen er minst like bra som den andre mulige verdenen. Videre fremgår det at B* er den relasjon som består mellom to mulige verdener w og w' hvis og bare hvis w er strengt bedre enn w'. Max(B,a) er de B-maksimale elementene i a, dvs. de elementene som er minst like bra som alle andre elementer i a. L er relasjonen som består mellom to verdenen w' og w hvis og bare hvis w er like bra som w'. Uttrykket "Be;<w,x,t>(h;1,h;2)" innebærer at handlingsalternativet h;1 er strengt bedre enn handlingsalternativet h;2 for personen x ved tidspunktet t i verdenen w. Endelig er A;(x,t)(w) klassen av alle de handlingsalternativer som står åpne for individet x ved tidspunktet t i verdenen w.

§1.2 Ikke-logiske aksiomer i teorien TML

Vi har nå beskrevet språket til teorien TML helt presist. Teorien TML vil være presist definert om vi spesifiserer hvilke ikke-logiske aksiomer det er som inngår i den. Dette er de følgende: (a) Alle ZFCu- aksiomene i språket til TML. (b) Alle aksiomene i teorien T;1 (c) De aksiomene som vil bli spesifisert i resten av denne paragrafen.

Siden vi nå forutsetter at de primitive predikatene (1) – (7) er meningsfulle er det nærliggende å oppfatte alle setningene, dvs. de lukkede formlene i språket til TML som enten sanne eller usanne. Det er derfor selvfølgelig at man bør forsøke å velge ut sanne setninger i språket til TML som aksiomer.

De følgende fire setninger sier at relasjonene "Mb;(w,x,t)(h;1,h;2)" og "B(w,w') er transitive og refleksive.

A1 Mb;(w,x,t)(h;1,h;2) & Mb;(w,x,t)(h;2,h;3) –> Mb;(w,x,t)(h;1,h;3)
A2 Alt;w(h,x,t) –> Mb;(w,x,t)(h,h)
A3 B(w;1,w;2) & B(w;2,w;3) –> B(w;1,w;3)
A4 wêI –> B(w,w)

Lukningene av disse åpne setningene synes temmelig ukontroversielle. De inkluderes derfor som ikke-logiske aksiomer i teorien. Også de følgende åpne setninger synes rimelige:

A5 Alt;w(h,x,t) –> wêI & têT
A6 Mb;(w,x,t)(h;1,h;2) –> (Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t))
A7 Re;w(h,x,t) –> Alt;w(h,x,t)
A8 B(w;1,w,2) –> w;1,w;2êI

Når det gjelder A5 sier denne setningen at dersom h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w så er w en mulig verden og t et tidspunkt. Videre sier A6 at dersom h;1 er et handlingsalternativ som det er bedre å utføre enn alternativet h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w så er h;1 og h;2 handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w. Det ville være merkelig om noen for alvor benektet disse to påstandene. Det samme gjelder det som uttrykkes av A7 og A8. A7 innebærer at dersom h er et handlingsalternativ som x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w så er h et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w. A8 sier at dersom en mulig verden w;1 er minst like god som w;2 så er w;1 og w;2 mulige verdener.

De følgende aksiomer karakteriserer relasjonen historisk identitet opp til og inkludert et gitt tidspunkt. Det første aksiomet, A9, sier at hvis w;1 er historisk identisk med w;2 opp til og inkludert tidspunktet t så er w;1 og w;2 to logisk mulige verdener og t et tidspunkt. Det skulle være vanskelig å se noen innvendinger mot dette. Dette gjelder også A10 – A12 som sier at Hist;t er transitiv, symmetrisk og refleksiv over mengden av mulige verdener. Dette innebærer at Hist;t for alle têT oppfattes som en ekvivalens-relasjon. Det er vanskelig å se at det skulle kunne reises noen seriøse innvendinger mot dette. Det siste aksiomet sier at dersom to verdener w;1 og w;2 er historisk identiske opp til og inkludert et bestemt tidspunkt t' og t er et tidspunkt som kommer før t' så er det også slik at w;1 og w;2 også er historisk identiske opp til og inkludert dette tidligere tidspunktet. Dette virker også svært rimelig intuitivt sett. Også mot dette aksiomet synes det derfor svært vanskelig å reise noen alvorlige innvendinger.

A9 Hist;t(w;1,w;2) –> têT & w;1,w;2êI
A10 Hist;t(w;1,w;2) & Hist;t(w;2,w;3) –> Hist;t(w;1,w;3)
A11 Hist;t(w;1,w;2) –> Hist;t(w;2,w;1)
A12 wêI & têT –> Hist;t(w,w)
A13 t,t'êT & t≤t' –> Hist;t'(w;1,w;2) –> Hist;t(w;1,w;2)

I forbindelse med det siste aksiomet gjør vi oppmerksom på at vi bruker "t≤t'" som forkortelse for "t<t' v t=t'". Når det gjelder tid skal vi bare forutsette at < er en lineær, tett og kontinuerlig ordning av T og at mengden av tidspunkter er uendelig i begge retninger:

A14.0 x<y –> (Tp(x) & Tp(y))
A14.1 x< y & y< z –> x< z
A14.2 x< y –> ¬(y< x)
A14.3 Tp(x) & Tp(y) –> (x< y v x=y v y< x)
A14.4 x< y –> (Ez)(Tp(z) & x< z & z< y)
A14.5 Tp(x) –> (Ey)(Tp(y) & x< y)
A14.6 Tp(x) –> (Ey)(Tp(y) & y< x)

Følgende aksiomer karakteriserer predikatet "Alt;w(h,x,t)"

A15 Hist;t(w,w') –> (Alt;w(h,x,t) –> Alt;w'(h,x,t))
A16 Hist;t(w,w') –> (Mb;(w,x,t)(h;1,h;2) –> Mb;(w',x,t)(h;1,h;2))
A17 Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t) & h;1≠h;2 –>
¬(Ew)(Re;w(h;1,x,t) & Re;w(h;1,x,t))
A18 Alt;w(h,x,t) –> (Ew')(Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t))

A19 (Eh)(Alt;w(h,x,t) –> (Eh)(Alt;w(h,x,t) & Re;w(h,x,t))

Disse setningene virker ikke fullt så evidente som de vi tidligere har omtalt. Som man ser sier A15 at dersom w og w' er mulige verdener som er historisk identiske opp til og inkludert tidspunktet t og h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w så er h også et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i den andre verdenen w'. Det er vanskelig å gi noen ytterligere argumenter til fordel for denne påstand enn at den virker plausibel ved nærmere ettertanke og at den tilsynelatende avspeiler endel av innholdet i hva som menes med historisk identitet.

Lignende "grunner" kan fremføres til fordel for A16. Denne setningen sier at dersom w og w' er mulige verdener som er historisk identiske opp til og inkludert tidspunktet t og h;1 er et handlingsalternativ som er bedre enn handlingsalternativet h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w så er h;1 er et handlingsalternativ som er bedre enn handlingsalternativet h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w'.

A17 er muligens mer innlysende enn A15 og A16. Det sier at dersom h;1 og h;2 er to distinkte handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w så er det logisk umulig at x fra og med tidspunktet t realiserer begge disse alternativene. Det innebærer altså grovt sagt at de handlingsalternativer som står åpne i en gitt situasjon må være uforenlige. Igjen synes det vanskelig å utlede denne påstanden fra mer innlysende premisser. Men det kan kanskje sies at påstanden gjenspeiler de intuisjoner som noen har om at for at to ting skal kunne kalles alternativer må de være uforenlige. Det er vanskelig å se noen seriøse innvendinger mot påstanden.

A18 uttrykker at dersom h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w så må det finnes en verden w' som er historisk identisk med w opp til og inkludert tidspunktet t hvor x fra og med t realiserer alternativet h. Denne setningen gir uttrykk for den ide at en handlingsalternativ logisk sett må være realiserbart. Det behøver naturligvis ikke å bli realisert.

Endelig uttrykker A19 at dersom visse handlingsalternativer står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w så vil det være slik at x realiserer et av disse fra og med tidspunktet t i verdenen w. Også dette kan virke intuitivt sett rimelig.

Dette avslutter oversikten over ikke-logiske aksiomer og dermed definisjonen av teorien TML. Dette er, for å oppsummere, den teorien hvor språket er som angitt i §1.1 og hvor de ikke-logiske aksiomene, i tillegg til dem som inngår i ZFCu og T;1 er lukningene av setningene A1 – A19 som vi har spesifisert ovenfor.

§1.3 Innledende kommentarer til aksiomene i TML

Som nevnt i §1 vi i de følgende paragrafer kommentere ytterligere aksiomene som inngår i TML. Vi gir først enkelte kommentarer til de predikatene som har med tid og historisk identitet å gjøre. Dernest kommenterer vi preferanse-relasjonen mellom de handlingsalternativene som står åpne for en person ved et gitt tidspunkt og viser hvordan begrepene påbudt, tillatt og forbudt kan innføres i teorien. Dernest diskuteres sider ved aksiomene for relasjonen "minst like bra som" mellom mulige verdener. Etter dette ser vi på muligheten av en kvantitativ teori om verdiavstander mellom logisk mulige verdener. Disse temaene tas opp i §1.4 til §1.8. I §2 formulerer vi visse aksiomer som forbinder relasjonen "minst like bra som" mellom handlingsalternativer med "minst like bra som" relasjonen mellom mulige verdener. I §3 innfører vi så deontiske operatorer og i §4 formulerer og beviser vi en rekke satser som forhåpentligvis gir en et visst innblikk i hva som kan utledes i teorien.

§1.4 Kommentarer til de tidsteoretiske aksiomene

De setningene om tid i språket til TML som vi har inkludert blandt de ikke-logiske aksiomene i denne teorien er av en rent kvalitativ karakter. Det dreier seg om setningene A14.0 – A14.6. De er tilstrekkelige for våre formål her fordi betraktninger i forbindelse med tid spiller en underordnet rolle. Imidlertid kunne man ha erstatte disse setningene med en sterkere setning. Vi lar "Reell" betegne mengden av alle de reelle tall. Istedet for de nevnte aksiomene kunne vi ha antatt at det finnes en en-entydig strukturbevarende avbildning mellom de reelle tall ordnet ved relasjonen < og mengden av tidspunkter ordnet ved hjelp av før-relasjonen <. Poenget er altså at man i stedet for de nevnte aksiomer i stedet kunne ha benyttet den følgende setning:

A14.7 (Ef)(f: Reell –(1-1,på)–> T &
(Ax)(Ay)(x,yêReell –> (x<y <–> f(x) <f(y))))

På basis av de setninger som kan utledes om ordningsrelasjonen < mellom de reelle tall i den foreliggende teori, skulle det ikke være vanskelig å se at setningene A14.0 – A14.6 kan utledes fra A14.7.

§1.5 Kommentarer til aksiomene om historisk likhet mellom mulige verdener. Sammenfall mellom mulige verdener ved et gitt tidspunkt.

I TML har vi innført predikatet "Verdenen w;1 er historisk identisk med verdenen w;2 opp til og inkludert tidspunktet t" – "Hist;t(w;1,w;2)" som et primitivt predikat. Som man ser er det i denne teorien karakterisert ved setningene A9 – A13. Når dette predikatet har blitt innført som et primitivt predikat er det primært fordi det er dette begrepet vi trenger for våre overveielser her. Imidlertid er det andre muligheter som bør nevnes på dette punkt. Er en verden w1 historisk identisk med en verden w2 opp til og inkludert tidspunktet t synes dette å innebære at de to verdenene faller sammen ved alle tidspunkter som kommer før og som inkluderer tidspunktet t. Omvendt virker det rimelig å påstå at dersom to verdener faller sammen ved alle tidspunkter som kommer før tidspunktet t og også faller sammen ved dette tidspunktet, så er de to verdenene historisk sett identiske opp til og inkludert tidspunktet t. I stedet for å bruke "Hist;t(w,w')" som et primitivt predikat i teorien kunne man derfor tenke seg at man innførte predikatkonstruksjonen "Verdenen w faller sammen med verdenen w' ved tidspunktet t" som primitivt predikat i språket til TML. Vi skal bruke "Coins;t(w,w')" som forkortelse for denne konstruksjonen.

Hvilke setninger som inneholder dette predikatet ville det så være naturlig å inkludere som ikke-logiske aksiomer i teorien TML om man fjernet "Hist;t(w,w')" som primitivt predikat og dermed A9 – A13? Det synes rimelig å kreve at Coins er en ekvivalensrelasjon. Dette innebærer at den er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Det skulle også være rimelig å anta at om verdenen w faller sammen med verdenen w' ved tidspunktet t så er w og w' logiske mulige verdener og t et tidspunkt. Disse påstandene kan formaliseres slik:

A9.1 Coins;t(w;1,w;2) & Coins(w;2,w;3) –> Coins;t(w;1,w;3)
A9.2 Coins;t(w;1,w;2) –> Coins;t(w;2,w;1)
A9.3 têT & wêI –> Coins;t(w,w)
A9.4 Coins;t(w,1,w;2) –>. w;1,w;2êI & têT

Poenget er at man nå kan definere predikatet "Hist;w(w,w')" ved hjelp av "Coins;t(w,w')" på følgende måte:

Definisjon 1.5.1: Hist;t(w,w') <–> (At')(t'êT &(t'<t v t= t'). –> Coins;t'(w,w'))

Det skulle ikke by på særlige problemer å vise at om man i stedet for A9 – A13 benytter A9.1 – A9.4 samt definisjonen ovenfor av "Hist;t(w,w')" kan man lett utlede setningene A9 – A13. Dette er såpass enkelt at beviset kan overlates til leseren som øvelse.

Den fremgangsmåten som er beskrevet her synes å være mer fleksibel enn den som inngår i versjonen av TML som vi har definert i §2. Det bør også be-merkes at teorien bestående av A9.1 – A9.4 er langt sterkere enn den vi allerede har presentert. Dette fremgår av det vi nevnte, nemlig at A9 – A13 kan utledes fra aksiomene ovenfor. Men det synes ikke som om det motsatte er tilfelle. Ved hjelp av relasjonen Hist;t(w,w') synes man ikke å kunne definere den sammenfallsrelasjonen mellom mulige verdener som vi nå har innført slik at man på basis av aksiomene i TML kan utlede A9.1 – A9.4.

§1.6 Vedrørende handlingsalternativer som er forbudt, påbudt og tillatt.

Det synes å være en rekke fordeler ved å ta utgangspunkt i relasjonen "h;1 er et handlingsalternativ som det er minst like bra at x realiserer fra og med tids-punktet t i verdenen w som alternativet h;2" som vi forkorter med "Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)" Ved hjelp av denne relasjonen kan man definere hva som menes med uttrykket "h;1 er et handlingsalternativ som det er bedre at x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w enn alternativet h;2". Vi forkorter dette med "Be;<w,x,t>(h;1,h;2)". Definisjonen er denne:

Definisjon 1.6.1 Be;<w,x,t>(h;1,h;2) <–>
(Mb;<w,x,t)(h;1,h;2) & ¬ Mb;<w,x,t)(h;2,h;1))

Videre kan man definere hva som menes med "h;1 er et handlingsalternativ som det er like bra at x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w enn alternativet h;2". Dette forkorter vi med "Lb;<w,x,t>(h;1,h;2)". Den naturlige definisjonen er i dette tilfelle:

Definisjon 1.6.2 Lb;<w,x,t>(h;1,h;2) <–>
(Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)& Mb;<w,x,t>(h;2,h;1))

Men man kan også definere hva det vil si at det er tillatt for x fra og med tidspunktet t å realisere alternativet h i verdenen w, "Til;<w,t>(h,x)", og hva det vil si at h er et handlingsalternativ som det er forbudt for x å realisere fra og med tidspunktet t i verdenen w, "Forb;<w,t>(h,x)", om vi tenker oss at vi tar med predikatet "h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Alt;w(h,x,t)". Disse predikatene kan i så fall defineres slik:

Definisjon 1.6.3 (a) Til;<w,t>(h,x) <–>. Alt:w(h,x,t)&
(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h'))
(b) Forb;<w,t>(h,x) <–>. Alt;w(h,x,t) & ¬Til;<w,t>(h,x)

Man ser at tillatthet og forbudthet ved handlingsalternativer kan defineres ved hjelp av

relasjonen "minst like bra som" mellom alternativer. Men den sistnevnte relasjon kan neppe defineres på noen tilfredsstillende måte ved hjelp av de to førstnevnte begrepene.

Videre kan man også definere hva det vil si at et handlingsalternativ er påbudt. Man kunne si at handlingsalternativet h er et som det er påbudt for x å realisere fra og med tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis det er det eneste alternativet som som det er tillatt for x for x å realisere fra og med t i verdenen w. Bruker vi "Pb;<w,t>(h,x)" som forkortelse for "h er et handlingsalternativ som det er påbudt for x å realisere fra og med tidspunktet t i verdenen w" kan definisjonen formelt sett formuleres slik:

Definisjon 1.6.4 Pb;<w,t>(h,x) <–> Til;<w,t>(h,x) &
(Ah')(Alt;w(h',x,t) & Til;<w,t>(h',x) –> h=h'))

A1 og A2 sier at relasjonen Mb;(w,x,t)(h;1,h;2) er transitiv og refleksiv. Det er imidlertid en rekke naturlige sammenhenger mellom de begrepene vi nå har innført, nemlig hva som menes med at et handlingsalternativ er tillatt, påbudt og forbudt som best synes ivaretatt om man antar at relasjonen Mb;(w,x,t)(h;1,h;2) er sammenlignbar. Det er derfor nærliggende å ta i betraktning den følgende setning:

(S1) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t) –>
Mb;(w,x,t)(h;1,h;2) v Mb;(w,x,t)(h;2,h;1)

Den følgende sats viser en del sammenhenger mellom predikatene "Pb;<w,t>(h,x)", "Til;<w,t>(h,x)" og "Forb;<w,t>(h,x)" som kan utledes på basis av de definisjonene vi har gitt ovenfor:

Teorem 1.6.4 Anta sammenligningsloven:
(h)(h')(Alt;w(h,x,t) & Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h')v Mb;<w,x,t>(h',h))
holder. Da gjelder:

(i) Pb;<w,t>(h,x) <–> Alt;w(h,x,t) &
(Ah')(Alt;w(h',x,t) & h'≠h –> Be;<w,x,t>(h,h'))
(ii) Pb;<w,t>(h,x) <–> Mg(h': Til;<w,t>(h',x)) = {h}
(iii) Forb;<w,t>(h,x) <–>. Alt;w(h,x,t) &
(Eh')(Alt;w(h',x,t) & Be;<w,x,t>(h',h))
(iv) Pb;<w,t>(h,x) –>. Alt;w(h,x,t) &
(Ah')(Alt;w(h',x,t) & h'≠h –> Forb;<w,t>(h',x))
(v) Pb;<w,t>(h,x) <–>. Til;<w,t>(h,x) &
(Ah')(Alt;w(h',x,t) & h'≠h –> Forb;<w,t>(h',x))

Bevis: Ad (i): Vi viser først kondisjonalen mot høyre i (i). Anta
(1) Pb;<w,t>(h,x).
Da har man fra definisjonen av Pb, Definisjon 1.6.4 at
(2) Til;<w,t>(h,x) & (Ah')(Til;<w,t>(h',x) –> h'=h)
Fra dette følger (3) Alt;w(h,x,t). Det gjenstår derfor bare å vise den siste konjunkten i høyre side i (i). Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes h0 slik at:
(4) Alt;w(h0,x,t) & h0≠h & ¬Be;<w,x,t>(h,h0)
Fra den siste komponenten her følger (5) Lb;<w,x,t>(h,h0) v Be;<w,x,t>(h0,h). Fra den andre konjunkten i (4), samt (2), følger:
(6) ¬Til;<w,t>(h0,x)

Fra dette og definisjonen av "Til;<w,t>(h,x)" som er:

Til;<w,t>(h,x) <–> Alt:w(h,x,t)&
(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h'))

følger det at det finnes h1 der man har:

(7) Alt;w(h1,x,t) & ¬ Mb;<w,x,t>(h0,h1). Fra dette har man:

(8) Be;<w,x,t>(h1,h0)

Fra den første konjunkten i (2) og definisjonen av Til følger:

(9) Alt;w(h,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h'))

Fra dette og (7) har man: (10) Mb;<w,x,t>(h,h1)

Men fra dette og (8) følger Be;<w,x,t>(h,h0) som åpenbart strider mot (4).

Vi gir så et bevis for kondisjonalen mot venstre i (i).

Anta (1) Alt;w(h,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h≠h' –> Be;<w,x,t>(h,h'))

Vi ønsker å vise følgende:

(2) Til;<w,t>(h,x) & (Ah')(Til;<w,t>(h',x) –> h' = h).

La oss først vise den første konjunkten i (2). Dette innebærer at man i lys av definisjonen av "Til;<w,t>(h,x)", Definisjon 1.6.3, må bevise:

(2.1) Alt;w(h,x,t) og

(2.2) (Ah')(ALt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h'))

Her følger (2.1) direkte fra (1). Anta Alt;w(h',x,t) for vilkårlig h'. Er da h=h' har vi umiddelbart Mb;<w,x,t>(h,h') fordi relasjonen Mb er refleksiv. Er h≠h' følger fra (1) at Be;<w,x,t>(h,h') og derfor Mb;<w,x,t>(h,h'). Dette viser at (2.1) og (2.2) holder. Man må imidlertid også vise at den andre konjunkten i (2) holder. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes h0 der:

(3) Til;<w,t>(h0,x) & h0≠h.

Fra den første komponenten her har man i lys av Definisjon 1.6.3:

(4) Alt;w(h0,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h0,h').

Fra (3) og (1) følger:

(5) Be;<w,x,t>(h,h0)

Videre følger fra (1) og (4) Mb;<w,x,t>(h0,h). I lys av definisjonen av Be er det klart at dette strider mot (5). Dette viser at punkt (i) i teoremet holder.

Ad (ii): I lys av Definisjon 1.6.4 har man at Pb;<w,t>(h,x) er ekvivalent med:

Til;<w,t>(h,x) & (Ah')(Til;<w,t>(h',x) –> h'=h)

Den første konjunkten her er ekvivalent med hêMg(h': Til;<w,t>(h',x)). Dette i sin tur er ekvivalent med {h} Inkl Mg(h': Til;<w,t>(h',x)). Den andre konjunkten er åpenbart ekvivalent med Mg(h': Til;<w,t>(h',x)) Inkl {h}. Man ser fra dette at Pb;<w,t>(h,x) er ekvivalent med Mg(h': Til;<w,t>(h',x)) = {h}.

Ad (iii): Vi beviser først implikasjonen mot høyre. Anta Forb;<w,t>(h,x). Ved hjelp av Definisjon 1.6.3 følger da: Alt;w(h,x,t) & ¬Til;<w,t>(h,x). Fra dette og definisjonen av "Til;<w,t>(h,x)" følger at det finnes h0 der:

Alt;w(h0,x,t) & ¬Mb;<w,x,t>(h,h0).

Fra det siste følger, siden vi forutsetter sammenlignbarhetsloven, at Be;<w,x,t>(h0,h). Dette viser at implikasjonen mot høyre holder.

La oss så vise implikasjonen mot venstre i (iii). Anta derfor:

(1) Alt;w(h,x,t) & (Eh')(Alt;w(h',x,t) & Be;<w,x,t>(h',h))

Fra den siste komponenten her følger:

¬(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> ¬Be;<w,x,t>(h',h)) Herav har man:

¬(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h')). Fra dette og Definisjon 1.6.3 følger ¬Til;<w,t>(h,x). Dette viser at punkt (iii) i satsen holder.

Ad (iv): Anta (1) Pb;<w,t>(h,x). Ved hjelp av punkt (i) følger da:

(1.1) Alt;w(h,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h≠h' –> Be;<w,x,t>(h,h'))

Vi ønsker å vise at konsekventen i (iv) holder. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes h' der man har:

(2) Alt;w(h',x,t) & h≠h' & ¬Forb;<w,t>(h',x)

Fra den siste konjunkten her følger ved hjelp av (iii) siden Alt;w(h',x,t):

(Ah;1)(Alt;w(h;1,x,t) –> ¬Be;<w,x,t>(h;1,h'))

Siden Alt;w(h,x,t) følger herav (3) ¬Be;<w,x,t>(h,h'). Men fra (1.1) og (2) har man Be;<w,x,t>(h,h'). Dette gir en åpenbart en motsigelse.

Ad (v): La oss først se på kondisjonalen mot høyre. Har man Pb;<w,t>(h,x) følger umiddelbart ved hjelp av (ii) og (iii) at

(1) Til;<w,t>(h,x) og

(2) (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h'≠h –> Forb;<w,t>(h',x))

For å vise at kondisjonalen den andre veien holder anta at (1) og (2) er tilfelle. Vi ønsker å vise:

(+) (Ah')(Til;<w,t>(h',x) –> h'=h)

Dette, (1) og definisjonen av "Pb;<w,t>(h,x)" impliserer Pb;<w,t>(h,x). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise (+). Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes h0 slik at

(3) Til;<w,t>(h0,x) & h0≠h

Da har man åpenbart at Alt;w(h0,x,t) & h0≠h. Det følger da ved hjelp av (2) at Forb;<w,t>(h0,x). Men fra dette og Definisjon 1.6.3 har man at ¬Til;<w,t>(h0,x) som helt klart strider mot (3). Dette viser at punkt (v) holder.

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Noen kommentarer kan være på sin plass i forbindelse med satsen ovenfor. La oss først nevne at selv om man har at

(1) Alt;w(h,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h≠h'. –> Forb;<w,t>(h',x))

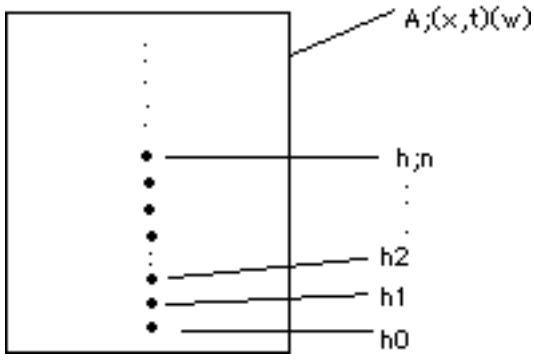
kan man ikke uten videre slutte at

(2) Pb;<w,t>(h,x), dvs. at h er et handlingsalternativ som er påbudt for individet x ved tidspunktet t i verdenen w. Grunnen er at klassen av alle de handlingsalternativene som står åpne for x ved tidspunktet t, A;(x,t)(w), ikke behøver å inneholde noe maksimalt element med hensyn på relasjonen Mb. For hvert handlingsalternativ kan man finne et bedre. I så fall vil ethvert handlingsalternativ være forbudt, også h, om vi antar hêA;(x,t)(w). Men selv om vi postulerer at A;(x,t)(w) inneholder et Mb-maksimalt element om den er ikke-tom, dvs. antar riktigheten av:

(3) A;(x,t)(w)≠ø –> (Eh)(Alt;w(h,x,t)&
(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h')))

kan man ikke fra (1) slutte (3). Grunnen er at h ikke behøver å være det maksimale element i A;(x,t)(w). Det er av denne grunn at bare kondisjonalen mot venstre i punkt (iv) i teoremet ovenfor holder. Kondisjonalen den andre veien holder ikke. La oss også bemerke at dersom A;(x,t)(w) ikke inneholder noe beste alternativ kan intet alternativ være tillatt og derfor heller ikke noe alternativ være påbudt.

FIGUR



§1.7 Setninger som belyser strukturen til relasjonen B.

Vi har innført relasjonen B ovenfor. Er w;1 og w;2 to mulige verdener innebærer w;1Bw;2 at w;1 er e verden som er minst like bra som verdenen w;2. Det er en lang rekke spørsmål som kan stilles om strukturen til denne relasjonen og som synes meget vanskelige å avgjøre på noen overbevisende måte. Vi skal etterhvert se på en del slike spørsmål.

La oss først nevne at det virker ukontroversielt å påstå at B er en transitiv og refleksiv relasjon over mengden av mulige verdener, mao. at den er en preordning over mengden av de mulige verdenene. Dette er forøvrig det eneste som "offisielt" påstås i TML. Man ser fra det som tidligere er nevnt at de følgende formler er de eneste ikke-logiske aksiomene om B som inngår i TML:

A3 B(w;1,w;2) & B(w;2,w;3) –> B(w;1,w;3)
A4 wêI –> B(w,w)
A8 B(w;1,w,2) –> w;1,w;2êI

Blandt de spørsmål som kan stilles om B skal vi nå se på de følgende og kort drøfte mulige svar på dem:

For det første kan spørre om B er total i den forstand at to mulige verdener alltid er sammenlignbare med hensyn på B. Er det med andre ord slik at for ethvert par av mulige verdener <w,w'> har man w enten er strengt bedre enn w' eller at w er nøyaktig like bra som w' eller at w' er strengt bedre enn w?. Formelt sett kan er altså spørsmålet om den følgende setning i språket til TML kan regnes som riktig:

(+) (Aw)(Aw')(w,w'êI –> (wB*w' v wLw' v w'B*w))

Det er naturligvis svært vanskelig å si noe avgjørende om dette. Man kan langt fra si at (+) er opplagt. Et eksempel vil kanskje gi en et bedre bilde av hvor problematisk (+) er. La oss tenke oss to verdener w;1 og w;2 som er historisk sett helt like opp til og inkludert tidspunktet t. Men i første verdenen w;1 er det slik at Beethovens niende symfoni utslettes totalt fra og med tidspunktet t. I den andre verdenen er det slik at Schuberts niende symfoni utslettes totalt. I alle andre henseende forutsettes det at w;1 og w;2 er like. Er det da slik at w;1 er verre enn w;2? Er det med andre ord slik at den verdenen hvor Schuberts store symfoni utslettes – selv om dette har stor negativ verdi – tross alt er bedre enn en der det nevnte hovedverk av Beethoven for evig tid utslettes? På noen virker det sikkert meningsløst og umulig å si noe om dette. Man må derfor regne med at noen vil avvise spørsmålet som totalt

tøvete, i beste fall ufruktbart. På den annen side kan det vel også tenkes at noen kanskje vil se på disse to verdenene som like bra selv om de nevnte forhold i dem selvfølgelig har stor negativ verdi.

Når det gjelder spørsmål av denne typen synes imidlertid noen å være av en noe mindre problematisk natur. Hvis man for eksempel tenker seg en verden som er helt identisk med den aktuelle verden fa og med nå av , men som avviker fortidig sett bare fra den aktuelle verden ved at hendelsesforløpene under siste verdenskrig er noe annerledes – noen færre menneskeliv går tapt – virker en slik mulig verden bedre enn vår egen.

Vi skal ikke ta definitiv stilling til (+) her. La oss bare nevne to ting som muligens er temmelig trivielle. For det første virker det som om (+) kan legges til teorien TML uten at det oppstår motsigelser, dvs. er TML motsigelsesfri vil man også få e motsigelsesfri teori om TML utvides med (+) som et nytt ikke-logisk aksiom. For det andre synes det rimelig å si at et aksiom av typen (+) i en viss forstand forenkler teorien fordi relasjonen B får en meget enklere og lineær struktur. Dette kan naturligvis oppfattes som et argument til fordel for denne påstanden.

Et annet spørsmål som kan stilles er om det finnes visse maksimale elementer i mengden av mulige verdener med hensyn på relasjonen B. Sagt på en annen måte er spørsmålet om det finnes en eller flere mulige verdener w som er minst like bra som absolutt alle mulige verdener. Påstanden at det finnes slike mulige verdener kan uttrykkes på litt forskjellige måter i TML. Det følgende er en måte:

(2.1) (Ew)(wêI & (Aw')(w'êI –> wBw'))

En annen formel som uttrykker det samme under visse forutsetninger er:

(2.2) (Ew)(wêI & ¬(Ew')(w'êI & w'B*w))

Denne siste formelen uttrykker at det finnes en logisk mulig verden w som er slik at det ikke finnes noen logisk mulig verden w' som er strengt bedre enn w. Igjen er det slik at det er ytterst vanskelig å ta noen definitiv stilling til disse to påstandene. Det virker som om den eneste type av argumenter som kan ha noe for seg er av en rent systematisk natur. Muligens kan man ved disse to aksiomene også hevde at de vil gjøre teorien enklere.

I forbindelse med disse to formlene vil vi først vise at (2.1) impliserer (2.2) gitt aksiomene om B som inngår i TML. Anta

(Ew)(wêI & (Aw')(w'êI –> wBw')).

Det følger at (1) wêI & (Aw')(w'êI –> wBw') for en eller annen mulig verden w. Anta for reduktio ad absurdum at (Ew')(w'êI & w'B*w). Da har man for noe w' at (2) w'êI & w'B*w. Dette og (1) impliserer at w'B*w & wBw'. Men i lys av definisjonen av B* følger herav: w'Bw & ¬(wBw') & wBw' som åpenbart representerer en klar motsigelse. Vi har derfor wêI & ¬(Ew')(w'êI & w'B*w). Dette impliserer i sin tur ar (2.2) holder.

La oss så se på implikasjonen den andre veien: Anta (2,2) holder. Det følger da at det finnes w slik at (3) wêI & ¬(Ew')(w'êI & w'B*w). Fra dette følger åpenbart (Aw') (w'êI –> ¬(w'B*w)). Herav følger så ved hjelp av definisjonen av B* (Se Definisjon 1 i §1.1) at (Aw')(w'êI –> ¬(w'Bw & ¬(wBw')). Dette er i sin tur ekvivalent med (4) (Aw') (w'êI –> (wBw' v ¬(w'Bw))). Anta nå for vilkårlig w' at w'êI. Fra dette og (4) følger (wBw' v ¬(w'Bw). I det første tilfelle har man wBw' som er det vi ønsker. I det andre tilfelle ¬(w'Bw). Herav følger ikke uten videre wBw', men dette følger om vi antar at (+) holder som i lys av definisjonene av B* og L er ekvivalent med:

(++) (Aw)(Aw')(w,w'êI –> (w'Bw v wBw'))

Vi har derfor (Aw')(w'êI –> wBw'). Dette og (3) impliserer så (2.1).

La oss for ordens skyld vise at (+) og (++) er ekvivalente innenfor rammen av TML.

Anta (++) holder og at w,w'êI. Da har man (w'Bw v wBw'). Antar man at w'Bw følger siden vi har wBw' v ¬(wBw') at enten w'Bw&wBw', dvs. per definisjon wLw' eller at man har w'Bw & ¬(wBw'). Da følger w'B*w. I begge tilfelle følger at konsekventen i (+) holder. Anta man at wBw' følger siden man åpenbart har w'Bw v ¬(w'Bw) at man enten har wBw' &¬(w'Bw) og derfor wLw' eller at wBw'& ¬(wBw') som impliserer wB*w'. Igjen er det slik at konsekventen i (+) holder i begge tilfellene. Anta man på den annen side at (+) holder og at w,w' er vilkårlige objekter i I følger at wB*w' v wLw' v w'B*w. I det første tilfelle har man i lys av definisjonen av B* at wBw' og derfor at konsekventen i (++) holder. Det samme gjelder om w'Bw. Er w'Lw følger umiddelbart fra definisjonen av L at wBw' og derfor at konsekventen i (++) holder.

Ovenfor nevnte vi de tre aksiomene om relasjonen B som inngår i TML, nemlig A3, A4 og A8. Vi har nå betraktet to andre setninger som også kan komme på tale som aksiomer, nemlig (+) og (2.1) ovenfor. La oss gi dem nye navn og kalle dem henholdsvis A8.1 og A8.2. Vi kan også betrakte en setning som er analog med A8.2 og som sier at klassen av mulige verdener inneholder et B-minimalt element. La oss kalle dette A8.3. I tillegg til A3, A4 og A8 kan man derfor betrakte:

A8.1 (Aw)(Aw')(w,w'êI –> (w'Bw v wBw'))
A8.2 (Ew)(wêI & (Aw')(w'êI –> wBw'))
A8.3 (Ew)(wêI & (Aw')(w'êI –> w'Bw))

A8.3 er naturligvis like problematisk som A8.2. Setningen innebærer at det finnes så og si en dårligste verden, en verden som er slik at enhver verden er minst like bra som den. Hvis man virkelig tar denne idéen alvorlig må denne eller disse verdenene være de grusomste av alle verdener, verdener med vanvittige lidelser for mennesker og dyr i et omfang og i en utstrekning som intet menneske fullt ut kan fatte.

La oss se på noen andre aksiomer. Fra A3 og A4 følger det at relasjonen L slik denne er definert ved Definisjon 1 i §1.1 er ekvivalensrelasjon. Beviset for dette er enkelt:

(i) Anta w;1Lw;2 & w;2Lw;3 Da følger ved hjelp av definisjonen av L at w;1Bw;2 & w;2Bw;1 og w;2Bw;3 & w;3Bw;2. Men fra disse to forhold og A3 følger umiddelbart w;1Bw;3 og w;3Bw;1, ie. w;1Lw;3. Dette viser at L er transitiv.

(ii) Anta w;1Lw;2. Da har man w;1Bw;2 & w;2Bw;1. Fra dette følger så w;2Bw;1 & w;1Bw;2. Herav har man så ved hjelp av definisjonen av L: w;1Lw;1. Dette viser at L er en symmetrisk relasjon.

(iii) Det er klart om wêI at B(w,w) & B(w,w). Fra dette og definisjonen av L følger wLw. Man har derfor at (Aw)(wêI –> wLw). Dette viser at L er refleksiv over mengden av mulige verdener I.

At L er en ekvivalensrelasjon over I innebærer imidlertid at L inndeler mengden av mulige verdener i en familie av innbyrdes eksklusive, ikke-tomme mengder som samlet uttømmer I. Man kan stille spørsmålet om hvor mange slike ekvivalensklasser som finnes. Hvis man aksepterer TML følger det selvfølgelig at det finnes en mengde som er mengden av mulige verdener. Det skulle ikke være vanskelig å se at dette følger fra teorien om presise deskriptive utsagn, T;1, og TML er en utvidelse av denne teorien. Det følger derfor ved hjelp av potensmengde-aksiomet at mengden av delmengder av I eksisterer. Siden mengden av L-ekvivalensklasser over I er inkludert i Pt(I) følger så eksistensen av denne mengden ved hjelp

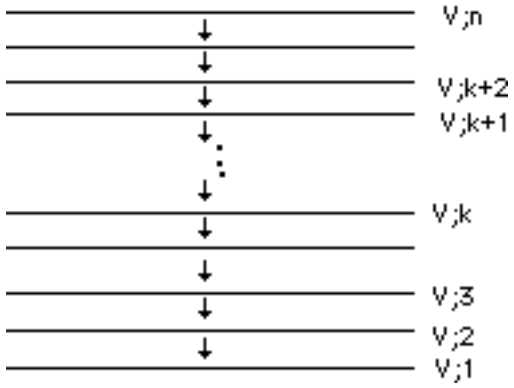
av utsondringsaksiomet. La oss betegne mengden av L-ekvivalensklasser over I med I/L. Nå er det slik at enhver mengde i det kumulative hierarki har et bestemt kardinaltall. Det følger derfor, siden I/L er en mengde,i det kumulative hierarki (eksistensen av et slikt hierarki er bygd inn i TML siden denne teorien inneholder ZFCu-aksiomene), at I/L må ha et bestemt kardinaltall, dvs. det må finne et minste ordinaltall som er likemektig med I/L. Spørsmålet kan derfor stilles om dette tallet er endelig eller uendelig, og i sistnevnte tilfelle hvor tallet "befinner seg" i rekken av uendelige kardinaltall.

Et temmelig ekstremt standpunkt, men ikke desto mindre mulig standpunkt, som det av systematiske grunner kan være av interesse å betrakte er at antallet av L-ekvivalensklasser over I er endelig. Dette kan uttrykkes ved den følgende formel:

A8.4 (En)(nêNat & n≈ I/L))

Sammen med A8.1 – A8.3 gir dette en en meget enkel og – slik kan det virke – temmelig naiv verditeori. De enkelte ekvivalensklassene i I/L representerer forskjellige verdinivåer. Er A8.4 riktig vil det derfor bare eksistere et endelig antall verdinivåer. Antar, eller forutsetter man, de andre aksiomene som er nevnt i forbindelse med relasjonen B innebærer alle disse at de enkelte verdinivåene kan ordnes lineært med verdinivået som inneholder de B-maksimale elementene i I øverst og verdinivået som inneholder de B-minimale elementene i I nederst. Dette kan anskueliggjøres ved den følgende figur:

FIGUR



Verdinivåene blir altså som trinnene i en stige med et endelig antall trinn. (Teorien utelukker selvfølgelig ikke at dette antall trinn kan være umåtelig stort) Det kan bare finnes et endelig antall verdinivåer mellom to trinn på stigen, dvs. mellom to distinkte verdinivåer.

Det kan være beleilig å ha et navn på denne temmelig ekstreme teorien om relasjonen B. La oss kalle den for " den finitære og hierarkiske teorien om relasjonen B".

Man kan tenke seg andre og svakere aksiomer om B enn konjunksjonen av A8.2, A8.3 og A8.4. Det kan ha en viss interesse å se på en del andre mulige teorier her av systematiske grunner. Hvis man antar, eller forutsetter, A3, A4, A8 og A8.1 følger det at verdinivåene i I/L ordne lineært av relasjonen "strengt bedre enn", ie. R*. Man kan nå, i stedet for A8.2 – A8.4 se på den følgende setning som sier at enhver ikke-tom delmengde av I inneholder B-maksimale elementer:

A8.5 (Aa)(aêPt(I) & a≠ø –> Max(B,a)≠ø)

Siden IêPt(I) &I≠ø impliserer denne setningen at I inneholder B-maksimale elementer. Med andre ord har man at A8.5 impliserer A8.2.

Hvis man nå definerer "Min(B,a)" ved:

Min(B.a) = Mg(w: wêI & (Aw')(w'êa –> w'Bw))

kan man også betrakte den følgende setning som er analog med A8.5 og som sier at enhver ikke-tom mengde med mulige verdener inneholder B-minimale elementer:

A8.5 (Aa)(aêPt(I) & a≠ø –> Min(B,a)≠ø)

Det bør noteres at teorien som består av A3, A4, A8, A8.1 – A8.4 selvfølgelig impliserer A8.5 og A8.6. På den annen side har det også en viss interesse å bemerke at konjunksjonen av A8.5 og A8.6 i nærvær av A3, A4, A8 og A8.1 impliserer A8.2, A8.3 og A8.4.

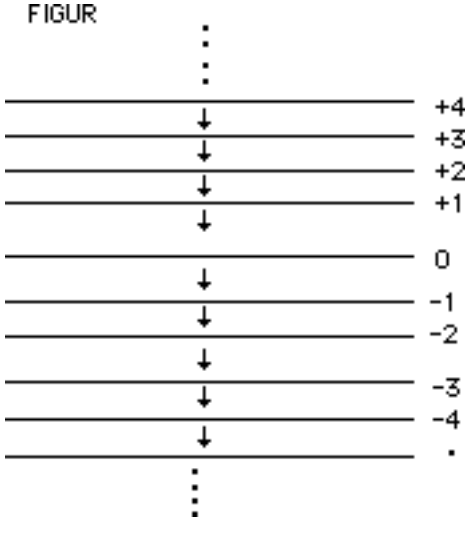
Ved siden av A8.5 og A8.6 er det også av interesse å se på det følgende par av setninger som er svakere en A8.5 og A8.6:

A8.7 (Aa)(aêPt(I) & a≠ø & (Ew)(wêI & (Az)(zêa –> wBz)). –> Max(B,a)≠ø)
A8.8 (Aa)(aêPt(I) & a≠ø & (Ew)(wêI & (Az)(zêa –> zBw)). –> Min(B,a)≠ø)

Som man ser fremkommer disse to formlene fra A8.5 og A8.6 ved å føye til betingelsene "(Ew)(wêI & (Az)(zêa –> wBz))" og "(Ew)(wêI & (Az)(zêa –> zBw))"i antesedenten i henholdsvis A8.5 og A8.6.

La a være en mengde med mulige verdener og anta x er en mulig verden. Da kaller vi x for en øvre B-skranke for a hvis og bare hvis x er minst like bra som alle elementene i a. Tilsvarende kaller vi x for en nedre B-skranke for a hvis og bare hvis alle elementene i a er minst like bra som x. Har en mengde med mulige verdener en øvre B-skranke kalles den for oventil B-begrenset, har den en nedre B-skranke kalles den for nedentil B-begrenset. Innføres denne terminologien ser man at A8.7 uttrykker at dersom en ikke-tom mengde av mulige verdener er oventil B-begrenset finnes det B-maksimale elementer i denne mengden. Tilsvarende sier A8.8 at dersom en ikke-tom mengde av mulige verdener er nedentil B-begrenset inneholder denne mengde B-minimale elementer. Aksiom A8.8 utelukker derfor at det kan finnes en mengde med mulige verdener som inneholder en uendelig oppadstigende B-kjede av elementer som er oventil begrenset. Derimot utelukker den ikke at I kan inneholde en uendelig mengde med elementer c;0, c;1, c;2,.... etc der c;(n+1)B*c;n for alle naturlige tall n.

FIGUR



I forbindelse med A8.7 og A8.8 noterer vi følgende: Hvis vi utvider TML med aksiomene A3, A4, A8, A8.1, samt A8.7 og A8.8 og dessuten antar at Max(B,I)=ø og Min(B,I)=ø, kan man vise at verdinivåene i I/L ordnet ved R* er isomorf med ordningen < over de hele tall, mao. kan man vise at det finnes en-entydig avbildning f av H = { ...-3,-2.-1,0,+1,2,... } på I/L slik at det dersom x,yêH har man x<y hvis og bare hvis wR*z for alle z,w der zêf(x) og wêf(y). Med andre ord kan verdinivåene, dvs. mengden av alle L-ekvivalensklasser over I, nå ordnes på den måten som er anskueliggjort ved den følgende figur:

La oss formulere resultatet som ble nevnt ovenfor som et teorem:

Teorem 1.7.1 (TML) Anta følgende:

(i) (Ax)(Ay)(x,yêI –> (xBy v yBx))

(ii) (Aa)(aêPt(I) & a≠ø & (Ew)(wêI & (Az)(zêa –> wBz)). –> Max(B,a)≠ø)

(iii) (Aa)(aêPt(I) & a≠ø & (Ew)(wêI & (Az)(zêa –> zBw)). –> Min(B,a)≠ø)

(iv) Max(B,I)= ø og Min(B,I) =ø.

Sett H = {...-3, -2, -1, 0, +1, +2,.....}. Da gjelder at det finnes en funksjon ∂ ser:

(a) ∂: H –(1-1,på)–> (I/L)

(b) (Ax)(Ay)(x,yêH –> (x≤y <–> (Az)(Aw)(zêH(x) & wêH(y) –> wBz)))

Bevis: Vi plukker ut en representant fra hver av L-ekvivalensklassene i I/L. Mengden av alle disse representantene kaller vi I*. Nå har man at I≠ø. Det følger derfor at I*≠ø. Det finnes derfor noe x0 slik at (1) x0êI*. Vi definerer så to mengder X og Y ved:

(2) X = Mg(z: zêI* & zB*x0)

(3) Y = Mg(z: zêI* & x0B*z)

X er altså alle de elementene i I* som er strengt bedre enn elementet x0 og Y mengden av alle de elementene i I* som x0 er strengt bedre enn. Siden et element i I* ikke både kan være bedre enn x0 og dårligere enn x0 har man at X og Y ikke har felles elementer:

(4) XΩY = ø

Videre skulle det være klart i lys av forutsetning (ii) og det forhold at I* inneholder en representant fra hver ekvivalensklasse i I at ethvert element i I* enten er strengt bedre enn x0 eller identisk med x0 eller strengt dårligere enn x0. Man har derfor:

(5) XUYU{x0} = I Siden x0 ikke er strengt bedre eller strengt dårligere enn seg selv har man også:

(6) ¬(x0êX) & ¬(x0êY)

Fra forutsetning (iv) har vi at Max(B,I)=ø. Dette innebærer at

(7) ¬(Ew)(wêI & (Az)(zêI –> wBz)). Fra dette følger:

(8) (Aw)(wêI* –> (Ez)(zêI* & ¬(wBz)). Fra dette følger så:

(9) (Aw)(wêI* –> (Ez)(zêI* & zB*w))

Dette følger ved hjelp forutsetning (i) og aksiomene for relasjonen B. Fra (1) og (9) og definisjonen av X følger åpenbart (10) X≠ø. På helt tilsvarende vis kan man vise at Min(B,I) impliserer:

(11) (Aw)(wêI* –> (Ez)(zêI* & wB*z))

Fra dette, (1) og definisjonen av Y følger: (12) Y≠ø.

Vi definerer nå induktivt to sekvenser: <X;i>/i≥1/ og <Y;i>/i≥1/ ved å sette:

(13.1) X;1 = X & X;(n+1) = X;n – Min(B,X;n)

(13.2) Y;1 = Y & Y;(n+1) = Y;n – Max(B,Y;n)

Videre defineres de to funksjonene h og g ved:

(14.1) $h(n) = (iz)(z \hat{e} Min(B,X;n)) \quad (n \geq 1)$

(14.2) $g(n) = (iz)(z \hat{e} Max(B,Y;n)) \quad (n \geq 1)$

Vi ønsker nå å vise:

(15) $h: N-\{0\} \text{ –(1-1,på)–> } X \quad \& \; g: N-\{0\} \text{ –(1-1,på)–> } Y$

Videre ønsker vi å vise:

(16.1) $(An)(Am)(n,m \geq 1 \text{ –> } (h(n) B^* h(m) \text{ <–> } n > m))$

(16.2) $(An)(Am)(n,m \geq 1 \text{ –> } (g(n) B^* g(m) \text{ <–> } m > n))$

Fra (15) og (16.1), (16.2) følger så lett satsen om man definerer $H = hU\{<0,x0>\}Ug$. Man skulle lett se at H definert på denne måten har de egenskapene som er nevnt i teoremet.

For å bevise den første konjunkten i (15) skal vi vise følgende:

(17)
(i) $(An)(n \geq 1 \text{ –> } (X;(n+1) \text{ Inkl } X;n \text{ Inkl } X)$
(ii) $(An)(n \geq 1 \text{ –> } (X;n \text{ Inkl } I^* \; \& \; X;n \neq I^*))$
(iii) $n \geq 1 \text{ –> } X;(n+1) = X - UN/i,1,n/(Min(B,X;i))$
(iv) $(An)(n \geq 1 \text{ –> } Min(B,X;n) \text{ Inkl } X)$
(v) $n \geq 1 \text{ –> } (Aw)(Az)(z \hat{e} Min(B,X;(n+1)) \; \& \; w \hat{e} Min(B,X;n). \text{ –> } zB^*w)$
(vi) $(An)(n \geq 1 \text{ –> } Min(B,X;n) \neq \emptyset)$
(vii) $(An)(n \hat{e} (N-\{0\}) \text{ –> } X;n \neq \emptyset)$
(viii) $n,m \geq 1 \; \& \; m > n \text{ –>}$
$(Aw)(Az)(z \hat{e} Min(B,X;m) \; \& \; w \hat{e} Min(B,X;n). \text{ –> } zB^*w)$
(ix) $X = UN/j,1,\infty/(Max(B,X;j))$
(x) $(An)(n \hat{e} (N-\{0\}) \text{ –> } h(n) \hat{e} X)$
(xi) $(An)(Am)(n \neq m \; \& \; n,m \geq 1 \text{ –> } h(n) \neq h(m))$
(xii) $(Aw)(w \hat{e} X \text{ –> } (En)(n \geq 1 \; \& \; w = h(n))$
(xiii) $Func(h)$
(xiv) $Dom(h) = N-\{0\}$

Ad (i): Fra definisjonen av "X;n", (13.1) følger umiddelbart at:

(18) $X;(n+1) \text{ Inkl } X;n.$

Vi viser så ved induksjon at $X;n \text{ Inkl } X$ for alle $n \geq 1$. For $n=1$ holder dette åpenbart fordi $X;1 = X$ per definisjon. Anta det holder for n. Da har vi ved hjelp av (18) at $X;(n+1) \text{ Inkl } X;n \text{ Inkl } X$. Påstanden holder derfor allment for $n \geq 1$.

Ad (ii): Man viser $(An)(n \geq 1 \text{ –> } X;n \text{ Inkl } I^*)$ ved induksjon på n. Er $n=1$ har man i kraft av (13.1) at $X;1 = X \text{ Inkl } I^*$ i kraft av definisjonen av X. Anta $X;n \text{ Inkl } I^*$. Da har man i lys av (i) at $X;(n+1) \text{ Inkl } X;n \text{ Inkl } I^*$. Dette viser at påstanden holder. Nå har man at $\neg(x0 \hat{e} X)$. Fra definisjonen av X har man da at $X \text{ SInkl } I^*$. Fra dette og (i) følger $X;n \text{ SInkl } I^*$ for alle $n \geq 1$. Det følger at $X;n \neq I^*$ for alle $n \geq 1$.

Ad (iii): Man viser dette ved induksjon på n. For $n=1$ har man

$X;2 = X;1 - Min(B,X;1) = X - Min(B,X;1)$. Påstanden holder derfor i dette tilfellet. Anta påstanden holder for $n \geq 1$. Da har man:

$$X;(n+2) = X;(n+1) - Max(B,X(+1))$$
$$= (X - UN/i,1,n/(Min(B,X;i))) - Max(B,X(+1))$$
$$= X - UN/i,1,n+1/(Min(B,X;i))$$

Dette viser at satsen i så fall holder for n+1. Påstanden holder derfor allment.

Ad (iv): Anta $n \geq 1$. Man har da ved hjelp av definisjonen av operasjonen Min:
$Min(B,X;n) = Mg(w: w \hat{e} X;n \; \& \; (Ay)(y \hat{e} X;n \text{ –> } yBw)) \text{ Inkl } X;n.$ Nå er imidlertid

X;n Inkl X i lys av (i). Det følger at Min(B,X;n) Inkl X.

Ad (v): Anta n≥1. Anta videre

(19) zêMin(B,X;(n+1)) & wêMin(B,X;n) for vilkårlige z og w. Fra den siste konjunkten i (19) følger ved hjelp av definisjonen av Min:

(20) wêX;n & (Ay)(yêX;n –> yBw). Fra den første konjunkten følger:

(21) zê(X;n–Min(B,X;n)) & (Ay)(yê(X;n–Min(B,X;n)) –> yBz)

Fra den første konjunkten i (21) følger zêX;n. Fra dette og (20) har man zBw. Fra (21), den første konjunkten, følger imidlertid ¬(zêMin(B,X;n)). Dette innebærer z≠w. Anta wBz. Sammen med zBw impliserer dette wLz. Men w,zêX;n Inkl I*. Siden vi har plukket ut nøyaktig en representant fra hver L-ekvivalensklasse innebærer dette at z=w. Men dette strider mot z≠w. Det følger ¬(wBz). Derfor zBw&¬(wBz). Dette er åpenbart ekvivalent med zB*w.

Ad (vi): Vi viser påstanden ved induksjon på n. Basistrinn: Man har at

Min(R.X;1)= Min(R,X) ≠ø

fordi X åpenbart er ikke-tom i lys av (10) og fordi den er nedentil B-begrenset av x0. Da følger Min(R,X)≠ø ved hjelp av forutsetning (iii).

Induksjonstrinn: Anta (22) (Aj)(1≤j≤n –> Min(R,X;j)≠ø). Vi ønsker å bevise at Min(R,X;(n+1))≠ø. Fra (22) følger (23) Min(R,X;n)≠ø. Fra dette følger i sin tur at det finnes w slik at:

(24) wêX;n & (Ay)(yêX;n –> yBw)

Fra (9) ovenfor følger da siden X;n Inkl X at det finnes z der

(25) zêI* & zB*w

Siden wêX;n har man wêX. Men X= Mg(z: zêI* & zB*x0) det følger derfor at

(26) zêX. Siden zB*w kan vi ikke ha zêMin(B,X;n). For i så fall ville vi i lys av (24) ha wBz og dette strider mot zB*w. Vi har derfor ¬(zêMin(B,X;n) og derfor i lys av (26) at zê(X–Min(B,X;n)). På basis av induksjonshypotesen (22) følger det at det må finnes y;1,...,y;n der y;n = w og hvor vi har:

(27) (Aj)(1≤j≤n –> y;j êMax(B,X;j)) Siden de diverse X;j Inkl I* og I* er fremkommet fra I ved å plukke ut nøyaktig ett element fra hver L-ekvivalensklasse følger enn mer:

(28) (Aj)(1≤j≤n –> {y;j} = Max(B,X;j)). Fra dette og (v) følger:

(29) y;n B* y;(n–1) B* y;(n–2)B* ..... B* y;1

Anta zêMax(B,X;k) for noe k≤n. Da har vi i lys av (28) at z=y;n=w eller at z=y;k for noe k der 1≤k<n. Det første er utelukket i lys av (25). Det andre impliserer sammen med (29) og det at y;n=w at wB*z som igjen strider mot (25). Vi har derfor at ¬(zêUN/j,1,n/(Max(B,X;j)). Det følger ved hjelp av (26) at:

zê(X – UN/j,1,n/(Max(B,X;j))). Fra dette og (iii) følger zêX;(n+1) og derfor at X;(n+1)≠ø. Nå har man at X;(n+1) Inkl X og at X er B-begrenset nedentil av x0. Det følger at X;(n+1) også er B-begrenset nedentil og derfor ved hjelp av forutsetning (iii) i teoremet at Min(B.X;(n+1))≠ø. Dette viser at punkt (vi) holder.

Ad (vii): Dette følger umiddelbart fra (vi) siden Min(B,X;n) Inkl X;n for alle n≥1. Dette siste følger fra definisjonen av operasjonen Min.

Ad (viii): Vi viser:

(30) n,m≥1 & m= (n+j) –>

(Aw)(Az)(zêMin(B,X;(n+j)) & wêMin(B,X;n). –> zB*w)

Er j=1 følger påstanden fra (v). Anta påstanden holder for j. Vi skal vise at den holder for j+1. Anta m,n≥1 & m= (n+(j+1)). Anta videre for vilkårlige z,w at
(31) zêMin(B,X;(n+(j+1))) & wêMin(B,X;n). Fra punkt (vi) følger at det finnes q slik at
(32) qêMin(B,X;n+j). Fra dette og den siste konjunkten i (31) følger ved hjelp av induksjonshypotesen at qB*w. Fra den første konjunkten i (31) og (32) følger ved hjelp av (v) at zB*q. Det følger at zB*w. Dette viser at påstanden holder.

Ad (ix): Inklusjonen mot venstre er temmelig opplagt siden vi har
Max(B,X;j) Inkl X for alle j≥1 i lys av (iv). La oss gi et bevis for inklusjonen mot høyre i (ix). Anta for reduktio ad absurdum at

(33) UN/j,1,∞/(Min(B,X;j)) SInkl X

Man har ved hjelp av (vi) at

(34) UN/j,1,∞/(Min(B,X;j)) ≠ø

Ved hjelp av (v) og (vi) følger også:

(35) (Aw)(wêUN/j,1,∞/(Min(B,X;j)) –>
(Ew')(w'êUN/j,1,∞/(Min(B,X;j)) & w'B*w)

Dette siste impliserer at UN/j,1,∞/(Min(B,X;j)) ikke inneholder noen maksimale elementer. Fra (33) følger at det finnes w der man har:

(36) wêX & ¬(wêUN/j,1,∞/(Min(B,X;j)))

Vi skal vise at w i så fall representerer en øvre skranke for UN/j,1,∞/(Min(B,X;j)). Dette innebærer at vi skal vise at:

(37) (Az)(zêUN/j,1,∞/(Min(B,X;j)) –> wBz)

Anta det motsatte, dvs. at det finnes z der zêUN/j,1,∞/(Min(B,X;j)) & ¬(wBz). Det siste impliserer zB*w. Det følger derfor at zêMin(B,X;j) & zB*w for noe j≥1. Man kan ikke ha at j=1 for i så fall ville ikke z være noe minimalt element i X;1=X siden zB*w & wêX. Man har derfor at j>1. Er w ikke med i Min(B,X;k) for noe k der 1≤k<j har man at wê(X–UN/k,1,j/(Min(B,X;k))) = X;(j+1). Men dette strider mot (36). Det følger derfor at wêMi(B,X;k) for noe k der 1≤k<j. Men også dette strider mot (36). Det følger fra dette at (37) holder. Men dette innebærer at w er en øvre skranke for UN/j,1,∞/(Min(B,X;j)). Siden denne mengden er ikke-tom følger det ved hjelp av forutsetning (ii) i teoremet at UN/j,1,∞/(Min(B,X;j)) må inneholde et maksimalt element. Men dette strider mot (35). Man ser at (36) leder til en motsigelse. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (ix) holder.

Ad (x): Anta nê(N–{0}). Da n≥1. Da følger:
h(n) =(iz)(zeMin(B,X;n))êMin(B,X;n) Inkl X ved hjelp av (iv).

Ad (xi): Anta for reduktio ad absurdum at det finnes n,m slik at n≠m & n,m≥1 og h(n)=h(m). Da har man i lys av definisjonen av h at

(iz)(zêMin(B,X;n)) = (iz)(zêMin(B,X;m))

Dette innebærer at det finnes w,z slik at wêMin(B,X;n) & zêMin(B,X;m) der w=z. Men dette strider mot (viii).

Ad (xii): Anta wêX. Fra dette og (ix) følger at det finnes n slik at:
n≥1 & wêMin(B,X;n). Men siden Min(B,X;n) Inkl I* følger at Max(B,X;n)={w}. Man har derfor at h(n) = (iz)(zêMax(B,X;n)) = w. Det følger at (En) (n≥1 & w = h(n))

Ad (xiii) og (xiv): Disse punktene følger direkte fra definisjonen av h.

Dette avslutter beviset for (17). Fra punkt (x) – (xiv) i (17) ser man også at den første konjunkten i (15) holder. Den andre konjunkten i (15) bevises på akkurat samme måte som den første. Det eneste man behøver å gjøre er å erstatte h med g , X med Y, X;n med Y;n og skrive Max over alt hvor det står Min (og omvendt) i beviset ovenfor. Vi overlater derfor beviset av den andre konjunkten i (15) til leseren.

Det gjenstår å gi et bevis for (16.1) og (16.2). Vi viser bare (16.1) siden beviset for (16.2) er helt analogt. Anta først n,m≥1 & (h(n)B*h(m). Vi har per definisjon h(n) = (iz)(zêMin(B,X;n)) og h(m) = (iz)(zêMin(B, X;m)). Anta m=n. Da har man h(n)=h(m) som åpenbart strider mot at h(n)B*h(m). Anta m>n. Man har h(n)êMin(B,X;n) & h(m)êMin(B,X;m). Da følger ved hjelp av (17), punkt (viii) at h(m)B*h(n). Men også dette strider mot at h(n)B*h(m). Det følger at n>m. Anta på den annen side at n>m. På basis av (17), punkt (vi), og definisjonen av h har vi h(n)êMin(B,X;n) & h(m)êMin(B,X;m). Fra dette og det at n>m følger ved hjelp av (17), punkt (viii) at h(n)B*h(n). Dette viser at (16.1) holder.

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

§1.8 En kvantitativ teori om verdiforholdene mellom mulige verdener.

Teorien om relasjonen B som ble fremstillt i forrige av paragraf er rent kvalitativ. Dette innebærer at man i språket til TML slik den er definert (og vi skal ikke endre definisjonen av TML) bare kan uttrykke påstander om at en verden er bedre enn en annen og en lang rekke lignende ting. Men det er ikke uttrykksmidler til rådighet i teorien TML som gjør det mulig å si noe om hvor mye bedre en verden er i forhold til en annen, heller ikke er det mulig å uttrykke påstander om hvor mye verre en verden er i forhold til en annen. Det er heller ikke mulig å formulere påstander som så og si sammenligner verdiavstander mellom par av mulige verdener.

Det er ikke klart at dette gir noen mening i det hele tatt. Det er vårt klare inntrykk at noen har en sterk avsky og motvilje mot teorier av denne karakter og reagerer med vemmelse og irritasjon når tanken bringes på bane. Det er mulig at dette er berettiget. På den annen side kan det likevel være av en viss interesse å formulere slike teorier klart og eksplisitt. Absurditene kunne da muligens tre enda tydeligere frem slik at det blir lettere å lokalisere dem. Videre kunne man få et bedre grunnlag for å forkaste slike teorier.

Hvis man nå skal formulere slike kvantitative påstander om verdi må man ha andre uttrykksmidler i tillegg til dem som finnes i TML. La oss derfor tenke oss at vi utvider språket til denne teorien med et nytt predikat "g er en verdifunksjon over mengden X". La oss forkorte dette predikatet med "Vf(g,X)". La oss så se på mulige setninger som kan formuleres innenfor rammen av dette mer omfattende språket som kan ha en viss plausibilitet.

Er f en verdifunksjon over mengden X virker det rimelig å anta at det dreier seg om en funksjon som tilordner elementene i X reelle tall:

VA1 Vf(g,X) –> f: X–> Reell

Er g1 og g2 to verdifunksjoner over X virker det også forholdsvis rimelig å anta at det følgende holder:

VA2 Vf(g1,X) & Vf(g2,X) –> (Ec)(c,bêReell & c>0 & (Ay)(yêX –> g2(y) = c*g1(y)+b))

Med andre ord bør det være slik – det er hva denne setningen uttrykker – at dersom g2 og g1 er verdifunksjoner over X så skal man få den verdiskala den ene funksjonen representerer ved å "strekke" eller "krympe" den verdiskalaen som den andre funksjonen representerer.

Den neste setningen vi skal betrakte i denne forbindelse er den følgende: Den sier at dersom g er en verdifunksjon over X og h er en annen funksjon som fremkommer ved å multiplisere de diverse f(x) med et positivt reelt tall >0 så er også h en verdifunksjon over X:

VA3 Vf(g,X) & h: X–> Reell &
(Ec)(Eb)(c>0 & c,bêReell &
(Ay)(yêX –> h(y)= c*g(y)+b). –> Vf(h,X)

Ingen av disse setningene relaterer predikatet "Vf(g,X)" til predikatet "w er en verden som er minst like bra som w'", dvs. til relasjonen B over mengden av de mulige verdener. Den følgende setning gjør dette og uttrykker at dersom g er en verdifunksjon over I så har man at en mulig verden w;1 er minst like bra om en annen w;2 hvis og bare hvis $g(w;1) \geq g(w;2)$:

VA4 Vf(g,I) –> (w;1Bw;2 <–> $g(w;1) \geq g(w;2)$)

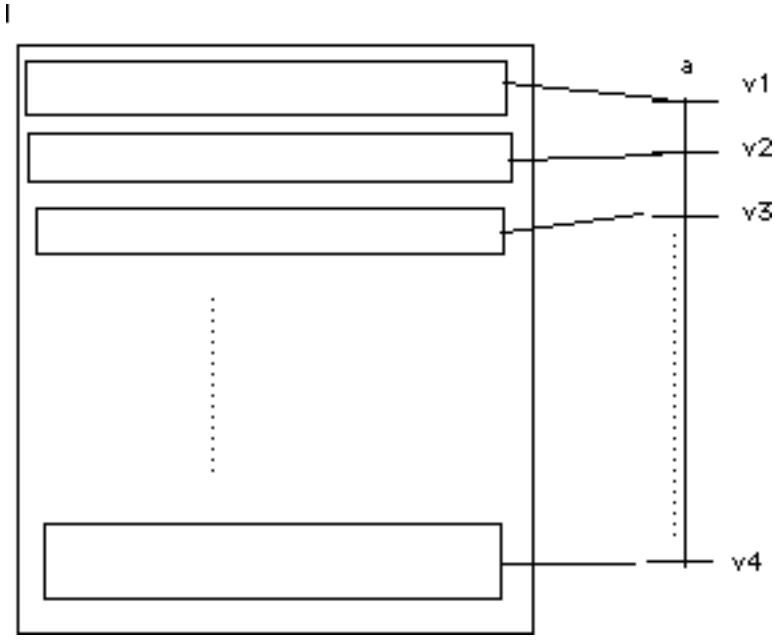
La oss på dette punkt bemerke at dersom språket til TML utvides slik som vi har beskrevet og TML utvides ytterligere med aksiomene VA1 – VA4 så følger umiddelbart at B er en preferanserelasjon, dvs. en transitiv og refleksiv relasjon der sammenlignbarhetsloven gjelder. Med "sammenlignbarhetsloven" mener vi her setningen (Aw)(Aw')(w,w'êI –>(wBw' v w'Bw)). I denne utvidelsen av TML kan derfor endel av de aksiomene vi tidligere har nevnt sløyfes som overflødige.

Strengt tatt impliserer ikke VA1 – VA4 at det faktisk finnes noen verdifunksjon over mengden av alle mulige verdener I. Den følgende setning sier eksplisitt at det finnes en slik funksjon:

VA5 (Eg)(Vf(g,I))

Når det gjelder de aksiomene som er nevnt sier de ikke så mye om "strukturen" til funksjonen f. Teorien impliserer f. eks. ikke at det finnes noen B-maksimale elementer i I, eller f.eks. at enhver ikke-tom delmengde av I inneholder B-maksimale og B-minimale elementer. Men man kan – og det er forsåvidt trivielt – formulere et ubegrenset antall setninger i dette språket som sier noe om dette. La oss se på et ekstremt eksempel som har en viss interesse i sammenheng med den finitære og hierarkiske teorien om relasjonen B:

VA6 Vf(g,I) –> (Ea)(aêPt(Reell) & 0 <Cd(a)< Aleph;0 &
(Ax)(xêI –> f(x)êa) & (Ay)(yêa –> (Ew)(wêI & f(w) = y)))



Som man ser er denne setningen en pedantisk formalisering av den påstand at hvis g er en verdifunksjon over I så finnes det en ikke-tom endelig mengde med reelle tall som oppfyller følgende krav: (i) g(w) er med i a for alle mulige verdener w. (ii) Er y et tall i a finnes det en mulig verden w slik at f(w) = y

Poenget med å nevne VA6 er at denne setningen i nærvær av de andre setningene vi har nevnt impliserer det som ovenfor ble kalt for den finitære og hierarkiske teorien om relasjonen b.

Man kan naturlig nok betrakte andre påstander av denne typen. La oss se på nok et eksempel. Den følgende setning er uforenlig med VA6 og impliserer at det finnes et helt kontinuum av verdinivåer i I:

VA7 $\quad Vf(g,I) \rightarrow (Ea)(Eb)(a,b \hat{e} Reell \;\&\; a>b \;\&\; (Ax)(x \hat{e} I \rightarrow g(x) \hat{e} <a,b>) \;\&\; (Ay)(y \hat{e} <a,b> \rightarrow (Ew)(w \hat{e} I \;\&\; g(w)=y)))$

Denne setningen impliserer sammen med VA1 – VA5 at det ikke finnes B-maksimale elementer i I. Videre impliserer setningen at dersom g er en verdifunksjon over I finnes det et reelt tall a som representerer en minste øvre grense for Mg(g(w): wêI).

Hvordan skal man så stille seg til setninger av typen VA1 – VA7? For vår egen del finner vi denne teorien ytterst spekulativ. Man kan karakterisere den som en teori vi ønsker å holde på "to armlengders avstand". Dette er ikke så meget fordi vi har vist at den er gal. Heller ikke fordi den utgjør et inkonsistent tillegg til TML. Grunnen er snarere den at vi ikke ser hvordan man på noen måte skal kunne komme til noen almen enighet om slike setninger som f. eks. A7.

§2 Andre mulige aksiomer.

Blandt de aksiomene som ble nevnt i forrige paragraf er det ingen som direkte knytter sammen predikatene "B(w,w')" og "Mb;(w,x,t)(h;1,h;2)". Det kan derfor være av interesse – forsåvidt av stor interesse – å se om det er mulig å formulere forholdsvis innlysende setninger i språket til TML som angir sammenhenger mellom disse begrepene. I denne

forbindelse har vi funnet det vanskelig å formulere noen virkelig innlysende prinsipper. Emnet er vanskelig. Det kan derfor bare komme på tale å formulere setninger av tentativ karakter som det utmerket godt kan vise seg ved nærmere ettertanke at har besynderlige og urimelige konsekvenser.

En setning som muligens er plausibel, i alle fall ved første øyekast, og som ved ytterligere refleksjon ikke behøver å vise seg helt umulig, er denne:

(1) Be;(w;0,x,t)(h;1,h;2) &
w;1êMax(B, Mg(w: Hist;t(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t))) &
w;2êMax(B, Mg(w: Hist;t(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t)))
–> B*(w;1,w;2)

Det er ikke umiddelbart så lett å se at denne setningen bør forkastes. Den kan ikke uttrykkes så kort og greit heller. Men det den sier er at dersom h;1 er et alternativ som er bedre en alternativet h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w;0 og w;1 er blandt de beste verdenene som er historisk identiske med w;0 opp til og inkludert tidspunktet t hvor x fra og med dette tidspunkt realiserer h;1, og w;2, tilsvarende, er blandt de beste verdenene hvor x fra og med t realiserer h;2 og som er historisk identiske med w;0 opp til og inkludert tidspunktet t, så er w;1 en verden som er bedre enn w;2.

Betrakter man (1) nærmere er det nærliggende å se på en litt sterkere versjon:

P1 Alt;(w;0)(h;1,x,t) & Alt;(w;0)(h;2,x,t) &
K(1) = Max(B, Mg(w: Hist;t(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t))) &
K(2) = Max(B, Mg(w: Hist;t(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t)))
& K(i)≠ø (i=1,2) . –>
[Be;<w;0,x,t>(h;1,h;2) <–>
(Ew;1)(Ew;2)(w;1êK(1) & w;2êK(2) & B*(w;1,w;2))]

Denne setningen kan virke meget "grisete". Den er imidlertid av interesse fordi den – gitt at den er sann – gir en klar reduktiv karakteristikk av relasjonen Be mellom handlingsalternativer ved hjelp av relasjonen B mellom mulige verdener. På den annen side synes dette prinsippet å være forholdsvis svakt. Vi har derfor ikke overdrevne forestillinger om at det er mulig å utlede svært interessante teoremer på basis av det.

P1 uttrykker at dersom h;1 og h;2 er to handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w;0 og det i tillegg er slik at mengden av alle de verdener som er historisk identiske med w;0 opp til og inkludert t og hvor x realiserer h;1 inneholder maksimale elementer , og det samme gjelder for h;2, så er h;1 et bedre alternativ for x ved tidspunktet t i w;0 hvis og bare hvis de beste elementene i den første mengden er bedre enn de beste elementene i den siste mengden.

Innholdet kan også uttrykkes på andre måter ved at man innfører noen definisjoner: Anta h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w;0. Da kan man kalle mengden av alle de verdener w som oppfyller de følgende to krav :

(i) w er historisk identisk med w;0 opp til og inkludert t
(ii) x realiserer alternativet h i verdenen w fra og med t

for *realiseringsmengden til h*. (underforstått med hensyn til parameterene w;0, x og t). Med

idealmengden til h kan man så forstå de beste elementene i realiseringsmengden til h. Gitt disse definisjonene kan innholdet i P2 formuleres noe kortere slik: Er h;1 og h;2 to alternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w;0, og er idealmengdene til h;1 og h;2 ikke-tomme, vil h;1 være et bedre alternativ enn h;2 dersom og bare dersom de beste elementene i idealmengden til h;1 er bedre enn de beste elementene i idealmengden til h;2.

Et spørsmål som også oppstår i forbindelse med denne setningen er om den kan konsistent legges til de øvrige aksiomer. Umiddelbart synes det ikke noe i veien for å gjette på at dette er tilfelle. Våre intuisjoner går umiddelbart i denne retning. Men så langt er alt på forsøksstadiet og det kan være at dette er galt. Det er heller selvfølgelig ikke utelukket – selv om P1 formelt sett er konsistent med de øvrige aksiomene –at setningen kan ha temmelig uintuitive konsekvenser i nærvær av disse andre aksiomene. Alt dette må utredes og på dette stadium kan vi ikke sies å ha kommet særlig langt.

I forbindelse med prinsippet P1 er det nærliggende å nevne de det prinsippet man får når man i P1 erstatter henholdsvis "Be;<w;0,x,t>(h;1,h;2)" og "B*(w;1,w;2)" med "Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)" og "Br(w;1,w;2)":

P2 Alt;(w;0)(h;1,x,t) & Alt;(w;0)(h;2,x,t) &
K(1) = Max(B, Mg(w: Hist;t(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t))) &
K(2) = Max(B, Mg(w: Hist;t(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t)))
& K(i)≠ø (i=1,2) . –>
[Mb;<w;0,x,t>(h;1,h;2) <–>
(Ew;1)(Ew;2)(w;1êK(1) & w;2êK(2) & Br(w;1,w;2))]

Hvis man videre setter per definisjon:

Lb;<w,x,t>(h;1,h;2) <–> (Mb;<w;0,x,t>(h;1,h;2)& Mb;<w;0,x,t>(h;2,h;1))

kan man også betrakte den formelen man får når man i P1 erstatter henholdsvis "Be;<w;0,x,t>(h;1,h;2)" og "B*(w;1,w;2)" med "Lb;<w,x,t>(h;1,h;2)" og "L(w;1,w;2)":

P3 Alt;(w;0)(h;1,x,t) & Alt;(w;0)(h;2,x,t) &
K(1) = Max(B, Mg(w: Hist;t(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t))) &
K(2) = Max(B, Mg(w: Hist;t(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t)))
& K(i)≠ø (i=1,2) . –>
[Lb;<w;0,x,t>(h;1,h;2) <–>
(Ew;1)(Ew;2)(w;1êK(1) & w;2êK(2) & L(w;1,w;2))]

I den utstrekning P1 kan sies å ha en viss plausibilitet synes det naturlig å si at P2 og P3 er like plausible. Vi bemerker også at det er mulig å utlede P1 og P3 fra P2 om Be og Lb defineres slik som det er blitt gjort her.

§3 Deontiske operatorer i TML

Den deontiske logikken tar angivelig opp logikken til slike uttrykk som "tillatt", "forbudt" og "påbudt". Man kan for eksempel utvide et vanlig første-ordens språk som inneholde identitet, funksjonssymboler og en beskrivelsesoperator med konstruksjonene "Det er tillatt at – ", "Det er forbudt at –" og "Det er påbudt at –". Dernest kan man forsøke å avgrense ved syntaktiske

og semantiske midler den klassen av formler i L som virker logisk sanne. Et system som da kanskje kan virke rimelig ville være noe i stil med systemet KD for operatoren "Det er påbudt at –" supplert med de vanlige definisjonene av konstruksjonene "Det er tillatt at – " og "Det er forbudt at –". Vi skriver "kan virke rimelig" for selv et slikt forholdsvis svakt system har blitt kritisert av forskjellige grunner.[1] Det er to momenter som det kan være rimelig å stanse opp ved i denne forbindelse.

For det første bør er det ikke opplagt at konstruksjonene "Det er tillatt at –", "Det er påbudt at –" og "Det er forbudt at –" har noen spesiell klar mening. Det er ikke tøvete å hevde at de kan virke ekstremt uklare. Det er heller ikke opplagt at det er tøv å hevde at de ikke har noen klar mening i det hele tatt. For det andre er det ikke umiddelbart opplagt at et forsøk på bare å systematisere de logiske lover som gjelder for disse operatorene i seg selv behøver å representere noe seriøst forsøk på begrepsanalyse. Man kan godt ha en følelse av at egentlig er svært lite substansielt sagt om hva disse operatorene egentlig betyr selv etter å ha blitt presentert for f.eks. et system som KD og skolert i Kripke-semantikk for systemer av denne type.

I det følgende vil vi derfor i noen grad se på hvordan deontiske operatorer kan introduseres innenfor rammen av TML.

I TML er det mulig er det mulig å uttrykke påstander om verdener som er historisk sett identiske opp til og inkludert et bestemt tidspunkt t. La w være en eller annen verden og t et eller annet tidspunkt. Mengden av alle de mulige verdenene som er historisk identiske med w opp til og inkludert tidspunktet t, mao. Mg(w': Hist;t(w',w)) skal vi betegne med "H;(t,w)". I denne mengden vil det kanskje være visse B-maksimale elementer. (Forutsetter vi for enkelhetens skyld den finitære og hierarkiske teorien om B er det helt klart at det må finnes slike elementer om H;(t,w) er ikke-tom.) La oss betegne de B-maksimale elementene i H;(t,w) med "Max(B,H;(t,w))". Vi kan da innføre et knippe av modalfunksjoner <G(t)>/têT/ ved å sette per definisjon:

G;(w,t) = Mg(y: yêPt(I) & ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl y)

Holder man t fiksert kan man da vise at G;(w,t) som en funksjon av variablen w er en modalfunksjon [2] om man forutsetter at Max(B,H;(t,w)≠ø for all wêI. Setter man altså G(t) = Mg(<w,G;(w,t)>: wêI) vil G(t) for hvert têT være en modal-funksjon under den nevnte forutsetning. De diverse G(t) kan sies å være "deontiske" siden man ikke har at de oppfyller det følgende krav:

(1) aêG(t)‘ w –> wêa

I forbindelse med de diverse G(t) der têT kan man så innføre to operatorer Skal@;t : U –> U og Til@;t :U–> U som er definert slik:

(2) (a) Skal@;t(u) = s;-1(Mg(w: wêI & μ;-1(u)êG(t)‘w)) (uêU)
(b) Til@;t(u) = Neg(Skal@;t(Neg(u)))

Som man ser har man at Mg(w: wêI & uêG(t)‘w) er en mengde med mulige verdener. Siden teorien om presise deskriptive utsagn inngår som en del av grunnlaget i TML følger det at

---

1 En av de mulige innvendingene som har blitt reist dreier seg om f.eks. gyldigheten til formelen "O(F) – O(FvG)", det som av og til kalles "Ross paradoks". Man kan nevne en rekke andre mulige innvendinger.

2 Når det gjelder begrepet 'modalfunksjon' kan man konsultere Rognes [9], §2.

denne mengden av mulige verdener er sannhetsmengden til utsagnet s;-1(Mg(w: wêI & uêG(t)‘w)) som i følge (2) er identisk med Skal@;t(u). Operatoren Skal@;t kan karakteriseres som deontisk fordi (1) ikke holder, dvs. mer presist fordi vi har at utsagnet C(Skal@;t(u),u) ikke er identisk med det tautologiske utsagn, μ-1(I), om uêU.

Hvis man anser alle de ikke-logiske predikatene i språket til TML for meningsfulle, og man dessuten også aksepterer at alle uttrykk som kan defineres på standardmåte ved hjelp av disse er meningsfulle, følger det at "G(t)" og "Skal@;t(u)" er meningsfulle uttrykk. Lesemåten av uttrykket "Skal@;t(u)" som antydes av definisjonen (2) er imidlertid ikke spesielt suggestiv. Er det mulig å finne andre, mer dekkende, lesemåter i denne forbindelse? Et forslag ville være det følgende:

(3) "Utsagnet som sier at u er et utsagn som er sant i alle de beste verdenene av dem hvor alt som har skjedd opp til og inkludert tidspunktet t er identisk med det som faktisk har skjedd opp til dette tidspunkt"

Denne lesemåten av uttrykket "Skal@;t(u)" er komplisert, men – og det tror jeg man bør medgi –, svært dekkende for innholdet i definisjonen (2). Lesemåten vil ikke være misvisende hvis man ser på denne definisjonen som den offisielle. Svarende til den singulære termen (3) har man den følgende setningsdannende konstruksjon på en setning P og en term t:

(4) "Det er tilfelle at P i alle de beste verdenene av alle dem hvor alt som har skjedd opp til og inkludert tidspunktet t er identisk med alt det som faktisk har skjedd opp til og inkludert dette tidspunkt"

Merk at (4) ikke har noen offisiell status i den teorien som er beskrevet her. Den inngår ikke i det ikke-logiske vokabularet i språket til TML. Men er u det utsagnet som uttrykkes av P og t det tidspunktet som betegnes av t burde en setning av typen burde regne som sann i en verden w ved tidspunktet t hvis og bare hvis utsagnet Skal@;t(u) er sant i verdenen w.

Man kan og bør nå spørre hvordan (3) er relatert til setninger som har noe med påbud, tillatelse og forbudt å gjøre. Med andre ord kan man spørre om hvordan konstruksjonen (3) er relatert til de deontiske konstruksjonene som vi nevnte innledningsvis i denne paragrafen og hvor vi fant visse grunner til å "beklage" oss over klarheten. Det synes som om det skulle være klart at man ikke kan lese "Skal@;t(u)" slik:

(5) "Utsagnet som sier at u er et utsagn som beskriver noe som skal være tilfelle etter tidspunktet t"

Grunnen er at u kan være et utsagn som beskriver forferdelige ting som har skjedd lenge før tidspunktet t i verdenen w og da vil dette utsagnet være sant i alle verdener som er historisk identiske med verdenen w opp til og inkludert t. Men da vil utsagnet også være sant i de beste av disse verdenene. Derfor vil Skal@;t(u) være sant i w om u er et slikt utsagn. Men det virker merkelig å hevde at utsagnet som betegnes av uttrykket (5) vil være det.

Nå har konstruksjonen (5) stor interesse. Det kan derfor være av viktighet å se om man innen rammen av TML kan definere noen modaloperator, la oss kalle den "h;t" slik at det blir naturlig å lese "h;t(u)" (hvor u er et utsagn) på måten som er angitt ved (5). La oss nå se på dette.

Tas Coins-predikatet med i språket til TML (Se §1.2.1.2) kan man se på klassen av alle de utsagn som oppfyller det følgende krav:

(6) (Aw)(wêμ(u) –>
Mg(w': w'êI & (At')(t<t' –> Coins;t'(w',w))) Inkl μ(u))

Hva sier så dette? Kravet innebærer at dersom en mulig verden w er med i sannhetsmengden til utsagnet u så skal alle verdenene som er historisk sett identiske med w etter tidspunktet t også være med i sannhetsmengden til u uansett hva som har skjedd i dem ved tidspunktet t eller før dette tidspunktet. Sagt på en annen måte innebærer kravet at utsagnet u er kompatibelt med alt som har skjedd før tidspunktet t, med andre ord innebærer det at utsagnet u beskriver noe som det logisk sett bare er mulig at først kan inntreffe etter tidspunktet t.

La oss betegne klassen av alle de utsagn u som oppfyller kravet (6) med "E(t)".[3] Formelt kan denne mengden defineres slik:

Definisjon 3.1 E(t) = Mg(u: uêU & (Aw)(wêμ(u) –>
Mg(w': w'êI & (At')(t<t' –> Coins;t'(w',w))) Inkl μ(u)))

For hvert têT kan man nå definere en funksjon Q(t): I –> Pt(E(t)) på følgende måte:

Definisjon 3.2 Q(t)(w) = Mg(u: uêE(t) & ø≠Max(B,H;(t,w)) Inkl μ(u))

Man kan nå innføre, for hvert têT, en funksjon Skal;t : U –> U i analogi med funksjonen Skal@;t ovenfor ved å definere:

Definisjon 3.3 (a) Skal;t(u) = μ;-1(Mg(w: wêI & uêQ(t)‘w))
(b) Til;t(u) = Neg(Skal;t(Neg(u)))

La oss nå se på "Skal;t(u)". Umiddelbart ser man at utsagnet Skal;t(u) er sant i en logisk mulig verden w hvis og bare hvis man har at uêQ(t)‘v. I sin tur innebærer dette i lys av definisjonen som nå ar blitt gitt av Q(t):

uêE(t) & Max(B, H;(t,w)) Inkl μ(u)

Dette innebærer for det første – når man tar i betraktning definisjonen av E(t) og våre kommentarer i forbindelse med den – at u er et utsagn som beskriver noe som logisk sett kan være tilfelle etter tidspunktet t. Den andre konjunkten sier at utsagnet u er sant i alle de beste verdenene som er historisk identiske med verdenen w opp til og inkludert tidspunktet t. I denne situasjonen virker det eiendommelig å benekte at u beskriver et forhold som ideelt sett bør realiseres etter tidspunktet t. Det omvendte virker også rimelig: Anta utsagnet u beskriver et forhold som ideelt sett bør realiseres etter tidspunktet t i verdenen w. Da synes det rimelig å kreve at uêE(t), med andre ord at u beskriver noe som logisk sett kan inntreffe etter tidspunktet t og altså ikke noe som kan inntreffe før tidspunktet t eller som bare kan være tilfelle før t. Videre virker det rimelig å kreve at alle de beste elementene i H;(t,w) er med i sannhetsmengden til u, ie. at Max(B,H;(t,w)) Inkl μ(u). Den tentative konklusjon på disse rent intuitive og på ingen måte avgjørende refleksjonene er at uttrykket "Skal;t(u)" kan leses i retning av "utsagnet som sier at u er et utsagn som beskriver noe som ideelt sett bør være tilfelle etter tidspunktet t". Erstatter man her "ideelt sett bør" med "skal" får man uttrykket (5) som vi nevnte ovenfor.

På dette punkt kan det være gunstig å se litt nærmere på hvilke lover som gjelder for

---

[3] "E(t)" kan leses "Mengden av alle de utsagn som beskriver forhold som logisk sett kan inntreffe etter tidspunktet t".

operatoren Skal;t. Som i teorien om presise deskriptive utsagn, se Rognes [2], bruker vi nå "C(x,y)" eller "x=>y" for å betegne kondisjonalutsagnet som har utsagnet x som antesedent og utsagnet y som konsekvent. "Neg(x)" betegner det utsagnet som er negasjonen av utsagnet x. "K(x,y)" betegner det utsagnet som er konjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y, "D(x,y)" betegner disjunksjonen av utsagnet x og y. Endelig betegner "SNu(a)", der a er en hvilken som helst mengde med utsagn, det utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene som inngår i mengden a. Alle disse begrepene ble utførlig definert og drøftet i Rognes [2].

La oss i forbindelse med definisjonen av mengden E(t) innføre relasjonen Etter;t(w,w'). Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.4

(i) Etter;t(w,w') <–> (w,w'êI & têT & (At')(t'êT & t'>t –> Coins;t'(w,w')))

(ii) e;t(w) = Mg(w': w'êI & Etter;t(w',w))

Som man ser fra denne definisjonen har man at Etter;t(w,w') holder hvis og bare hvis w og w' er to mulige verdener som er historisk sett sammenfallende ved ethvert tidspunkt som kommer etter tidspunktet t. e;t(w) er mengden av alle de verdener som sammenfaller, historisk sett, med w ved ethvert tidspunkt som kommer etter t. Det skulle være lett å se at Etter;t for hvert têT er en ekvivalensrelasjon. Når det gjelder E(t), Etter;t og e;t(w) nevner vi den følgende sats som oppsummerer endel av de viktigste egenskapene til disse begrepene:

Teorem 3.5

(i) Etter;t(w,w') & Etter;t(w,w'). –> Etter;t(w,w')

(ii) Etter;t(w,w') –> Etter;t(w,w')

(iii) wêI & têT –> Etter;t(w,w')

(iv) têT & wêI –> e;t(w)≠ø

(v) têT –> I = UN/wêI/(e;t(w))

(vi) têT & w,w'êI & e;t(w)≠ e;t(w') –> e;t(w)Ωe;t(w')=ø

(vii) xêE(t) & têT –> (Ey)(yêPt(I) & μ(x)=y &
(Ez)(zêPt(Mg(e;t(w): wêI)) & y =UN(z)))

(viii) têT –>. uêE(t) –> Neg(u)êE(t)

(ix) têT –>. u,v êE(t) –> K(u,v)êE(t)

(x) têT –>. u,v êE(t) –> D(u,v)êE(t)

(xi) têT –>. u,v êE(t) –> (u => v)êE(t)

(xii) têT –>. ø≠aêPt(E(t)) –> (SNu(a)êE(t) & UNu(a)êE(t))

Bevis: Vi skal ikke gi et helt detaljert bevis for denne satsen fordi enkelte av punktene er temmelig trivielle. Dette gjelder særlig punkt (i) – (vi). Vi overlater derfor disse til leseren. Derimot skal vi gi bevis for (vii) – (xii).

Ad (viii): Anta (1) têT & uêE(t) og anta for reduktio ad absurdum at
(2) Neg(u)êE(t). Fra (1) og definisjonen av E(t) følger:

(3) uêU & (Aw)(wêμ(u) –>
Mg(w': w'êI & (At')(t<t' –> Coins;t'(w',w))) Inkl μ(u))))

Fra (2) følger ved hjelp av definisjonen av E(t), siden Neg(u)êU når uêU, at det må finnes noe w0 slik at

(4) w0êμ(Neg(u)) og

(5) ¬(Mg(w': w'êI & (At')(t<t' –> Coins;t'(w',w0))) Inkl μ(Neg(u))))

Fra (5) har man at det må finne noe w1 slik at:

(6) w1êI & (At')(t<t' –> Coins;t'(w1,w0)) & ¬(w1êμ(Neg(u)))

Fra den siste konjunkten i (6) har man ¬(w1ê(I–μ(u))). Dette impliserer siden w1êI at w1êμ(u). Fra dette og (3) følger:

(7) Mg(w': w'êI & (At')(t<t' –> Coins;t'(w',w1))) Inkl μ(u)

Nå har man fra (6) at

(8) w0êMg(w': w'êI & (At')(t<t' –> Coins;t'(w',w1))) siden w0êI og Coins;t er en symmetrisk relasjon. Men fra (7) og (8) følger w0êμ(u) som åpenbart strider mot (4). Dette viser at påstanden (viii) holder.

Vi overlater beviset for de øvrige punkter i denne satsen til leseren. **Q.E.D.**

Vi skal også nevne enkelte satser om operatorene Skal@;t og Skal;t der têT. Siden G(t), for hver têT, er en modalfunksjon og Skal@;t og Til@;t er henholdsvis nødvendighetsoperatoren og mulighetsoperatoren assosiert med denne modalfunksjonen har man at satsene nedenfor gjelder. I forbindelse med denne satsen nevnes det at vi kaller et utsagn a for en tautologi dersom det er identisk med det nødvendig sanne utsagnet, det vil si utsagnet μ;-1(I). Videre gjør vi oppmerksom på at operatoren Skal@;t/n/ der n er et naturlig tall er definert ved:

Skal@;t/0/(u) = u
Skal@;t/n+1/(u) = Skal@;t(Skal;t/n/(u))

Tilsvarende er Til@;t/n/ definert ved:

Til@;t/0/(u) = u
Til@;t/n+1/(u) = Til@;t(Til;t/n/(u))

La oss imidlertid først vise at G(t) er en modalfunksjon. Dette holder ikke ubetinget som den følgende sats viser. Det holder bare om man antar at H;(t,w) inneholder et B-maksimalt element for enhver mulig verden w.

Teorem 3.6 Sett G(w,t) = Mg(y: yêPt(I) & ø≠Max(B,H;(t,w)) Inkl y). Sett videre per definisjon G(t) = Mg(<w,G(w,t)>: wêI). Anta têT og anta at

(+) (Aw)(wêI –> Max(B,H;(t,w)) ≠ø)

Under disse forutsetninger har man at <I,G(t)> er en modalfunksjon[4], dvs. at følgende holder:

(i) G(t) : I –>Pt(Pt(I))
(ii) Er wêI har man ø≠c Inkl G(t)(w) –> SN(c)êG(t)(w)
(iii) wêI & aêG(t)(w) & bêPt(I) & a Inkl b. –> bêG(t)(w)
(iv) wêI –> IêG(t)(w)

Bevis: Når det gjelder (i) er det klart at G(t)(w) = G(w,t) Inkl Pt(I). Det følger at G(w,t)êPt(Pt(I)) og derfor at g(t)(w)êPt(Pt(I)). Siden Dom(G(t)) =I har man følgelig at G(t) : I –> Pt(Pt(I)).

Når det gjelder (ii) kan denne påstanden bevises slik: Anta

(1) ø≠c Inkl G(t)(w).

Det vil være tilstrekkelig å bevise

(++) SN(c)êPt(I) & ø≠Max(B,H;(t,w)) Inkl SN(c)

i lys av definisjonen av G(t). Den første konjunkten i (++) er opplagt. Fra (1) følger (Ay) (yêc –> yêPt(I)). Herav følger så at SN(c)êPt(I) siden c≠ø.

4 Se Rognes [9], §2, Definisjon 2.1.

Fra (1) følger i lys av definisjonen av G(t) at:

(2) (Ay)(yêc –> (yêPt(I) & ø≠Max(B,H;(t,w)) Inkl y))

Siden c≠ø følger det at det finnes noe y0 slik at y0êc. Fra dette og (2) har man:

(3) Max(B,H;(t,w)) ≠ ø.

Man må også vise: (Aw)(wêMax(B,H;(t,w)) –> wêSN(c)). Dette er i lys av definisjonen av operasjonen SN ekvivalent med:

(4) (Aw)(wêMax(B,H;(t,w)) –> (Ay)(yêc–> wêy))

Anta derfor for vilkårlige w,y at (5) wêMax(B,H;(t,w)) & yêc. Fra dette og (2) følger Max(B,H;(t,w)) Inkl y. Fra dette og (5) har man så wêy. Dette viser at (4) holder og derfor at Max(B,H;(t,w)) Inkl SN(c).

Når det gjelder (iii) er det temmelig opplagt at dette punktet holder: Anta for vilkårlige objekter a,b og w at:

(6) wêI & aêG(t)(w) & bêPt(I) & a Inkl b

Fra den andre konjunkten følger da ved hjelp av definisjonen av G(t):

(7) aêPt(I) & ø≠ Max(B,H;(t,w)) Inkl a. Fra dette og de to siste konjunktene i (6) følger:

(8) bêPt(I) & ø≠ Max(B,H;(t,w)) Inkl b. Herav har man åpenbart bêG(t)(w).

Når det gjelder (iv) er det å bemerke at Max(B,H;(t,w))≠ø om wêI i lys av forutsetningen (+) i teoremet. Men Max(B,H;(t,w)) Inkl I og IêPt(I). Ved hjelp av definisjonen av G(t) følger da IêG(t)(w). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **Q.E.D.**

Teorem 3.7 Anta têT og aêU. Anta dessuten at den følgende forutsetning holder:

(a) (Aw)(wêI –> Max(B,H;(t,w))≠ø)

Da gjelder:

(i) Til@;t(a)<=> –Skal@;t(–a) er en tautologi.

(ii) Skal@;t(a) <=> –Til@;t(–a) er en tautologi.

(iii) Skal@;t(–a) <=> –Til@;t(a) er en tautologi.

(iv) –Skal@;t(a) <=> Til@;t(–a) er en tautologi.

(v) Til@;t/n/(a) <=> –Skal@;t/n/(–a) er en tautologi.

(vi) Er a en tautologi er også Skal@;t/n/(a) en tautologi.

(vii) Er a;1,....,a;m,aêU og er a;1Ω...Ωa;m => a en tautologi er også Skal@;t/n/(a;1)Ω....ΩSkal@;t/n/(a;m)=>Skal@;t/n/(a) en tautologi.

(viii) Er a,bêU og er a=>b en tautologi så er også Skal@;t/n/(a)=>Skal@;t/n/(b) en tautologi.

(ix) Er a,b,cêU og er aΩb=>c en tautologi er også Skal@;t/n/(a)ΩSkal@;t/n/(b)=> Skal@;t/n/(c) en tautologi.

(x) Er a,bêU og a<=>b en tautologi er også Skal@;t/n/(a)<=>Skal@;t/n/(b) en tautologi.

(xi) Skal@;t/n/(μ;-1(I)) er en tautologi.

(xii) Er a,bêU er Skal@;t/n/(aΩb) => Skal@;t/n/(a)ΩSkal@;t/n/(b) en tautologi.

(xiii) Er a,bêU er Skal@;t/n/(a)ΩSkal@;t/n/(b) => Skal@;t/n/(aΩb) en tautologi.

(xiv) Er a,bêU er Skal@;t/n/(aΩb) <=> Skal@;t/n/(a)ΩSkal@;t/n/(b) en tautologi.

(xv) Er a,bêU er Skal@;t/n/(a=>b) => (Skal@;t/n/(a)=>Skal@;t/n/(b)) en

tautologi.

Vi utelater beviset for denne og den følgende sats fordi satsene i det vesentlige er temmelig trivielle.

Teorem 3.8 Anta têT. Anta dessuten at den følgende forutsetning holder:
(a) (Aw)(wêI –> Max(B,H;(t,w))≠ø)
Da gjelder:
(i) Skal@;t/n/(a) <=> –Til@;t/n/(–a) er en tautologi.
(ii) Er –a en tautologi er også –Til@;t/n/(a) en tautologi
(iii) Er a;1,....,a;m,aêU og er a => a;1U...Ua;m en tautologi er også Til@;t/n/(a)=>Til@;t/n/(a;1)U....UTil@;t/n/(a;m) en tautologi.
(iv) Er a,bêU og er a=>b en tautologi så er også Til@;t/n/(a)=>Til@;t/n/(b) en tautologi.
(v) Er a,b,cêU og er a=>bUc en tautologi er også Til@;t/n/(a)=> Til@;t/n/(b)UTil@;t/n/(c) en tautologi.
(vi) Er a,bêU og a<=>b en tautologi er også Til@;t/n/(a)<=>Til@;t/n/(b) en tautologi.
(vii) –Til@;t/n/(ø) er en tautologi.
(viii) Er a,bêU er Til@;t/n/(aUb) => Til@;t/n/(a)UTil@;t/n/(b) en tautologi.
(ix) Er a,bêU er Til@;t/n/(a)UTil@;t/n/(b) => Til@;t/n/(aUb) en tautologi.
(x) Er a,bêU er Til@;t/n/(aUb) <=> Til@;t/n/(a)ΩTil@;t/n/(b) en tautologi.
(xi) Er a,bêU er (–Til@;t/n/(a))ΩTil@;t/n/(b) => Til@;t/n/((–a)Ωb) en tautologi.

Vi nevner også den følgende sats som viser at Skal@;t(u) impliserer Til@;t(u). Skal@;t er derfor for hvert têT en såkalt D-operator.

Teorem 3.9 Anta wêI &têT. Anta dessuten at u er et utsagn, ie. uêU. Da gjelder:
(a) [Skal;t(u)=> Skal@;t(u)] = μ;-1(I)
(b) wêμ;-1(Skal;t(u)) <–> uêE(t) & wêSkal@;t(u)
(c) wêμ;-1(Skal@;t(u)) –> wêμ;-1(Til@;t(u))

Bevis: Punkt (a) følger fra punkt (b). Man innser også meget lett at (b) holder på basis av definisjonene av Skal;t og Skal@;t. Når det gjelder (c) fremgår det fra definisjonen av Skal@;t at man har:

Skal@;t(u) = μ;-1(Mg(w: wêI &ø≠ Max(B,H;(t,w)) Inkl μ;-1(u)))

Dette skulle det være meget lett å innse. Man har:

wêμ;-1(Skal@;t(u)) <–> wêI & μ;-1(u)êG(t)‘w
<–> wêI & μ;-1(u)êMg(y: yêPt(I) & ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl y)
<–>. wêI &ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(u)

Dette viser at påstanden holder.

La oss gi beviset for (c), dvs. for: wêμ;-1(Skal@;t(u)) –> wêμ;-1(Til;t(u))
Man har fra det vi beviste rett ovenfor at:

(1) wêμ;-1(Skal@;t(u)) <–> wêI &ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(u)

Tilsvarende har man:

(2) wêμ;-1(Til@;t(u)) <–> wêμ;-1(Neg(Skal@;t(Neg(u))))
<–> wê(I – μ;-1(Skal@;t(Neg(u))))
<–> wêI & ¬(wêμ;-1(Skal@;t(Neg(u))))
<–> wêI & ¬(wêI &ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(u)))
<–> wêI& ¬(ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(u)))
<–> wêI &(ø≠ Max(B, H;(t,w)) –>
¬(Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(u))))

Anta nå at wêμ;-1(Skal@;t(u)). Fra dette og (1) har man:

(3) wêI &ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(u).

Anta nå at ø≠ Max(B, H;(t,w)). Da følger w1êMax(B,H;(t,w)) for noe w1. Fra dette og (3) har man w1êμ;-1(u). Det er da klart at ¬(w1ê(I–μ;-1(u)) og derfor at ¬(w1êμ;-1(Neg(u)). Det følger derfor at ¬(Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(u))). Vi har nå vist:

ø≠ Max(B, H;(t,w)) –> ¬(Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(u)))

Fra dette, den første konjunkten i (3) samt (2) har man: wêμ;-1(Til@;t(u)). Dette viser at påstanden holder. **Q.E.D.**

§4 Flere satser i teorien TML.

Selv om vi, som antydet, ikke skal forsøke oss på noen dyptgående analyse av TML, skal vi likevel studere enkelte setninger som lar seg utlede i denne teorien og gi bevis for dem.

Den følgende sats viser at hvis w er en mulig verden og h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i denne verdenen w så vil klassen av alle de verdener som er historisk identiske med verdenen w opp til og inkludert t kunne spaltes opp i et like stort antall ikke-tomme og innbyrdes disjunkte mengder som der er handlingsalternativer som står åpne for x ved t. Videre vil det være slik at det til hvert handlingsalternativ en-entydig korresponderer en slik klasse som da er de verdenene hvor x fra og med t realiserer alternativet.

Teorem 4.1. Anta wêI & Alt;w(h,x,t). Da finnes det en funksjon f som oppfyller de følgende krav:

(i) f: A;(x,t)(w) –> Pt(Mg(w': w'êI & Hist;t(w',w)))
(ii) h;1,h;2êA;(x,t)(w) & h;1≠h;2 –> f(h;1)Ω f(h;2)=ø
(iii) h;1êA;(x,t)(w) –> f(h;1)≠ø
(iv) Mg(w': w'êI & Hist;t(w',w)) = UN/hêA;(x,t)(w)/(f(h))
(v) hêA;(x,t)(w) –> (Aw')(w'êf(h) –> Re;w'(h,x,t))

Bevis: Anta wêI og at Alt;w(h,x,t). Definer f på den følgende måte:

f(h) = Mg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t)) om hêA;w(x,t)

Det skulle da være helt åpenbart at (i) holder. Anta h;1, h;2êA;(x,t)(w). Da har man per definisjon at (1) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t). Anta mot formodning at w'êf(h;1)Ωf(h;2). Fra definisjonen av f følger da Re;w'(h;1,x,t) & Re;w'(h;2,x,t). Men dette og (1) strider mot A17. La oss så bevise (iii). Anta hêA;(x,t)(w), med andre ord at Alt;w(h,x,t). Fra dette og A18 følger:

(Ew')(Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t)). Men herav kan vi ved hjelp av definisjonen av f umiddelbart slutte at f(h)≠ø.

La oss så ta for oss (iv). Anta først at yêUN/hêA;(x,t)(w)/(f(h)). Etter definisjonen

av UN følger da at det finnes h der hêA;(x,t)(w) & yêf(h). Det siste innebærer i lys av definisjonen av f at yêMg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t)). Men herav følger åpenbart yêMg(w': w'êI & Hist;t(w',w)). Anta på den annen side at (2) yêMg(w': w'êI & Hist;t(w',w)) for vilkårlig y. Fra forutsetningene har vi at Alt;w(h,x,t). Fra (2) følger Hist;t(y,w). Dette og Alt;w(h,x,t) impliserer ved hjelp av A15 at Alt;y(h,x,t). Fra dette og A19 følger

(Eh')(Alt;y(h',x,t) & Re;y(h',x,t)) og derfor at det må finnes noe h' slik at
(3) Alt;y(h',x,t) & Re;y(h',x,t). Men Hist;t(y,w). Derfor

(4) Hist;t(y,w)& Re;y(h',x,t). Men fra (3) og det at Hist;t(y,w) følger ved hjelp av A15 at Alt;w(h',x,t). Dette, (4) og definisjonen av f impliserer :
h'êA;(x,t)(w) & yêf(h'). Herav (Eh)(hêA;(x,t)(w) & yê f(h)). Dette vil si at yêUN/hêA;(x,t)/(f(h). Dette viser at (iv) holder.

Anta nå at hêA;(x,t)(w) & w'êf(h). Disse to tingene impliserer at
(5) Alt;w(h,x,t) og (6) Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t). Men den siste konjunkten i (6) impliserer trivielt at Re;w'(h,x,t). Dette viser at (v) holder.

Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

I det følgende skal vi bruke "E(w,t)" til å betegne klassen av alle de verdener som er historisk identiske med verdenen w opp til og inkludert tidspunktet t. Uttrykket kan formelt defineres slik: E(w,t) = Mg(w': w'êI & Hist;t(w',w)). På basis av aksiomene i TML som sier noe om historisk identitet ser man lett at den følgende sats holder:

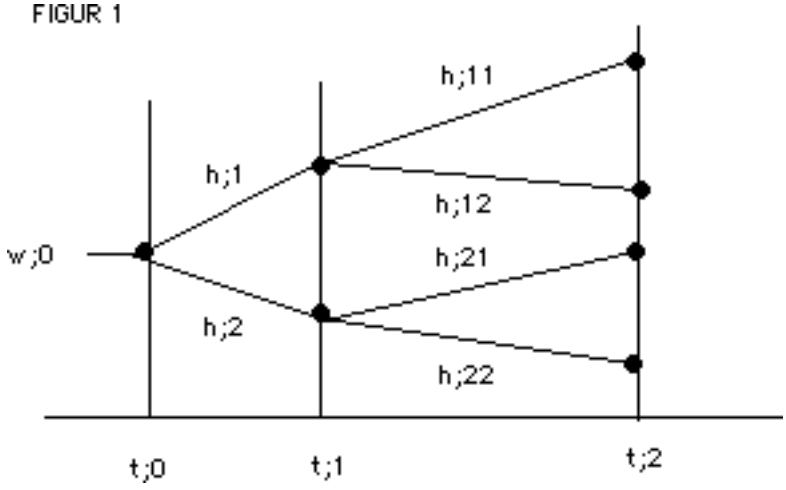
Teorem 4.2 Anta wêI og at t;1,t;2êT & t:1 <t;2. Da gjelder:

(i) E(w,t;2) Inkl E(w,t;1)
(iii) UN(Mg(E(w',t;2) : w'êE(w,t;1)) = E(w,t;1)
(iv) w;1,w;2êE(w,t;1) –> (Hist;(t;2)(w;1,w;2) <–> E(w;1,t;2) = E(w;2,t;2))
(v) w;1êE(w,t;1) –> E(w;1,t;2)≠ø
(vi) w;1,w;2êE(w,t;1) & E(w;1,t;2)≠E(w;2,t;2). –> E(w;1,t;2)ΩE(w;2,t;2) =ø

Dette teoremet sier at de diverse mengdene E(w',t;2) ettersom w' gjennomløper mengden av mulige verdener i E(w,t;1) utgjør en familie av ikke-tomme og innbyrdes disjunkte mengder som samlet uttømmer E(w,t;1). Vi overlater beviset for denne satsen til leseren siden det egentlig dreier seg om en enkel øvelse i teorien om ekvivalensrelasjoner. Fra aksiomene A9 – A13 fremgår det, som tidligere nevnt at Hist;t er en ekvivalensrelasjon over I for alle têT.

Som nevnt tidligere fant vi at det ikke var helt lett å se hva prinsippet P1 egentlig sier. Vi skal derfor forsøke å si noe konstruktivt om hva som følger fra det under visse nærmere angitte forutsetninger. I denne sammenheng er det hensikts-messig å se på hva som følger fra det under visse nokså enkle forutsetninger. Vi skal i første omgang se på en situasjon som kan anskueliggjøres ved den følgende enkle figur:

FIGUR 1



På figuren representerer den nederste horisontale linjen tidsaksen. På denne er avmerket tidspunktene t;0, t;1 og t;2 som kommer etter hverandre. Ved tidspunktet t;0 har aktøren x nøyaktig de to alternativene h;1 og h;2 å velge mellom. At alternativet h;1 er bedre enn alternativet h;2 er antydet ved sette det over h;1. At x ved tidspunktet t;1 kan velge mellom alternativene h;11 og h;12 og bare dem i alle verdener som er historisk identiske med w;0 opp til og inkludert t og hvor x realiserer h;1 er antydet ved linjene som forgrener seg ut fra h;1. Det samme kan sies om de to nederste grenene på figuren. Vi tenker oss altså en meget enkel situasjon der en person x først kan velge mellom to handlingsalternativer h;1 og h;2 og hvor vedkommende etter å ha realisert h;1 har valget mellom h;11 og h;12, mens alternativene h;21 og h;22 står åpne om det andre alternativet, h;2 velges. Det er meningen at ved t;1 skal det være bedre for x å velge h;11 enn h;12 gitt at vedkommende har valgt h;1 ved t;0. Tilsvarende er det meningen at alternativet h;21 er et bedre alternativ enn h;22 for x ved t;1 om x tidligere, ved t;0 har valgt å realisere h;2. Denne figuren angir ikke i seg selv noen presise forutsetninger som man kan undersøke konsekvensene av. Men situasjonen som er forsøkt anskueliggjort ved figuren kan angis presist slik:

Anta følgende er tilfelle:

(i) w;0êI & t;0,t;1, t;2êT & t;0 < t;1 <t;2
(ii) A;(x,t)(w;0) = {h;1,h;2} & Be;(w;0,x,t)(h;1,h;2)
(iii) (Aw)(wêI & Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t;0)–>
A;(x,t;1)(w) = {h;11,h;12} & Be;(w,x,t;1)(h;11,h;12)
(iv) (Aw)(wêI & Hist;(t;0)(w,w;0) ℜw(h;2,x,t;0) –>
A;(x,t;1)(w) = {h;21,h;22} & Be;(w,x,t;1)(h;21,h;22)
(v) Cd({h;1,h;2,h;11,h;12,h;21,h;22}) =6

I det følgende skal vi la "C" betegne konjunksjonen av disse fem betingelsene. Det vi er interessert i er å se hva som kan utledes ved hjelp av prinsippet P1 om vi antar at C holder for en viss verden w;0, tidspunkter t;0, t;1 og t;2, en person x og visse handlingsalternativer h;1, h;2, h;11,h;12, h;21, h;22. Man kan sammenfatte og anskueliggjøre forutsetningene (i) – (iv) ved hjelp av diagrammet ovenfor.

La oss først gi et bevis for den følgende ytterst beskjedne sats:

Teorem 4.3 Forutsett at C holder og at lukningen av P1 holder. Anta videre at
(+) Alt;w(h,x,t) –> Max(B,Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø
holder for alle wêI, têT, h og x. Sett videre:
A;1 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t;0))
og anta at Max(B,A;1)≠ø. Da gjelder:
(i) Max(B, A;1) Inkl Mg(w: Re;w(h;11,x,t;1))
(ii) Max(B, A;1) Ω Mg(w: Re;w(h;11,x,t;1)) ≠ ø

Bevis: Det skulle være klart at punkt (ii) i teoremet følger fra punkt (i) og forutsetningen om at Max(B,A;1)≠ø. Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise (i). Anta for vilkårlig w;2 at (1) w;2êMax(B,A;1). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av "Max" at (2) (Ax)(xêA;1 –> Br(w;2,x). Siden w;2êMax(B,A;1) må vi ha (3) w;2êA;1. Fra (3) og definisjonen av A;1 følger at
(4) Hist;(t;0)(w;2,w;0) & Re;(w;2)(h;1,x,t;0)
Fra dette og konjunkten (iii) i C følger:
(5) A;(x,t;1)(w;2) = {h;11,h;12} & Be;(w;2,x,t;1)(h;11,h;12)
La oss nå sette per definisjon:
(6.1) b1 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2) & Re;w'(h;11,x,t;1))
(6.2) b2 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2) & Re;w'(h;12,x,t;1))
Ved hjelp av Teorem 1 kan man slutte at:
(7) Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2)) = b1 U b2
(8) b1Ωb2 = ø
Videre kan man her ved hjelp av P2 og forutsetningen (+) trekke den slutning at det finnes s,t êI der man har:
(9) sêMax(B,b1) & têMax(B,b2) & B*(s,t)
Anta mot formodning at w;2êb2. Fra (9) følger da at Br(t,w;2). Fra dette og den siste konjunkten i (9) følger så at B*(s,w;2), med andre ord at elementet s er strengt bedre enn w;2. Men sêMax(B,b1) Inkl b1. Hvis vi nå kan vise at b1 Inkl A;1 vil vi ha bevist satsen for da vil vi ha at sêA1 og ifølge (2) må da Br(w;2,s) være tilfelle. Men dette og B*(s,w;2) impliserer åpenbart en motsigelse. Anta mot formodning at ¬(b1 Inkl A;1). Da finnes det en verden q der
(10) qêb1 & ¬(qêA;1)
Siden qêb1 følger at Hist;(t,1)(q,w;2). Herav Hist;(t;0)(q,w;2). Dette impliserer at Hist;(t;0)(q,w;0) siden w;2êA;1 og det derfor må være tilfelle at Hist;(w;0)(w;2,w;0) Setter man nå per definisjon:
A;2 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t;0)) har man i lys av Teorem 1 og forutsetningene i C at A;1UA;2 = Mg(w' : Hist;(t;0)(w',w;0) og at A;1ΩA;2=ø Det følger i så fall at qêA;2. Men siden qêb1 har vi nå at Re;q(h;11,x,t;1). Fra dette og A7 følger (11) Alt;q(h;11,x,t;1). Men siden qêA;2 har vi fra C punkt (iv) at
A;(x,t;1)(q)={h;21,h;22}. Men fra (11) følger h;11êA;(x,t;1)(q). Dette er umulig i lys av punkt (v) i forutsetningen C. Det følger at det er umulig at det kan finnes q slik at (10) og at b1 derfor må være inkludert i A;1.

Fra det som er godtgjort så langt følger at det er umulig at w;2êb2. Vi må imidlertid som avslutning vise at w;2êb1. Det vil da være tilstrekkelig å vise at følgende holder: (11) w;2ê(b1 U b2). Nå har man fra (5) at A;(x,t;1)(w;2)≠ø. Fra dette følger ved hjelp av A19 at:
(Eh)(Alt;(w;2)(h,x,t;1) & Re;(w;2)(h,x,t;1)). Det må med andre ord finnes h slik at:
(12) Alt;(w;2)(h,x,t;1) & Re;(w;2)(h,x,t;1).
Nå har man A;(x,t;1)(w;2) = {h;11,h;12}. Det følger derfor at h=h;11 eller at h=h;12. I det første tilfelle følger ved hjelp av (12) at Re;(w;2)(h;11,x,t;1) og derfor

Hist;(t;1)(w;2,w;2) & Re;(w;2)(h;11,x,t;1). Herav følger i lys av definisjonen av b1 at w;2êb1. I det andre tilfelle har man på lignende vis:

Hist;(t;1)(w;2,w;2) & Re;(w;2)(h;12,x,t;1) og derfor w;2êb2. I begge tilfelle holder w;2ê(b1Ub2). Dette viser at (11) holder og avslutter dermed vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 4.4 Anta C holder. Sett per definisjon:

A;1 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;(w;0)(h;1,x,t;0))
A;2 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;(w;0)(h;2,x,t;0))
A;11 = A;1 Ω Mg(w: Re;w(h;11,x,t;1))
A;12 = A;1 Ω Mg(w: Re;w(h;12,x,t;1))
A;21 = A;2 Ω Mg(w: Re;w(h;21,x,t;1))
A;22 = A;2 Ω Mg(w: Re;w(h;22,x,t;1))

Da gjelder:

(i) A;1ΩA;2 =ø
(ii) A;11 Ω A;12 = ø & A;11U A;12 = A;1
(iii) A;21 Ω A;22 =ø & A;21 U A;22 = A;2

Det er hensiktsmessig å gi et helt detaljert bevis for denne påstanden.

Bevis: (i) Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w er wêA;1ΩA;2. Da har vi i henhold til definisjonene av A;1 og A;2 at:

(1) Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;(w;0)(h;1,x,t;0) & Re;(w;0)(h;2,x,t;0)

Dette innebærer i lys av A7 at (2) Alt;(w;0)(h;1,x,t;0) & Alt;(w;0)(h;2,x,t;0). Fra (1) og (2) og A17 følger at h;1=h;2. Men dette strider mot den femte klausulen i forutsetningen C.

(ii) Anta mot formodning at det finnes en w der wêA;11 Ω A;12. Da har ved hjelp av definisjonene av A;11 og A;12 at

(1) wêA;1 & Re;w(h;11,x,t;1) & Re;w(h;12,x,t;1)

Fra den første konjunkten i (1) og definisjonen av A;1 følger:

(2) Hist;(w;0)(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t;0)

Fra dette og den andre konjunkten i forutsetningen C kan man slutte at:

(3) A;(x,t;1)(w) = {h;11,h;22}

Fra (3) følger umiddelbart at (4) Alt;w(h;11,x,t;1) & Alt;w(h;12,x,t;1). Siden vi i følge den femte klausulen i forutsetningen C har at h;11≠h;12 følger fra (4) og A17 at ¬(Ew)(wêI & Re;w(h;11,x,t;1) & Re;w(h;12,x,t;1)). Men dette strider åpenbart mot (1). Det er også nødvendig å vise at A;11 U A;12 = A;1. Inklusjonen mot høyre er triviell; den følger ved hjelp av definisjonene av A;11 og A;12. Anta på den annen side at wêA;1. Da har man:

Hist;(w;0)(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t;0)

ved hjelp av definisjonen av A;1. Fra dette og den tredje konjunkten i C følger at (5) A;(x,t;1)(w) = {h;11,h;12}. Da har man Alt;w(h;11,x,t;1) v Alt;w(h;12,x,t;1). Fra dette og A19 følger at det må finnes h slik at

Alt;w(h,x,t;1) & Re;w(h,x,t;1). I lys av (5) må det da enten være slik at h=h;11. I så fall har man wêMg(w': Re;w(h;11,x,t;1)) og dermed at wêA;11. Eller så må det være slik at h=h;12. Da følger Re;w(h;12,x,t;1) og dermed at wêA;12. Dette viser at punkt (ii) i teoremet holder.

(iii) Beviset for dette punkt er analogt med beviset under (ii). Er, mot formodning, wêA;21ΩA;22 for noe w, har man at Re;w(h;21,x,t;1) & Re;w(h;22,x,t;1). Men siden h;21 ≠ h;22 og Alt;w(h;2i,x,t;1) (i=1,2) følger da en motsigelse ved hjelp av A7 og A17. Det er videre trivielt at A;21UA;22 Inkl A;2. Er wêA;2 for vilkårlig w har man Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t;1). Dette og den fjerde konjunkten i forutsetningen C impliserer A;(x,t;1)

(w) = {h;21,h;22}. Da kan man slutte (Eh)(Alt;w(h,x,t)) og derfor, i følge A19, at Re;w(h,x,t;1) for noe hêA;(x,t;1)(w). Er h=h;21 følger Re;w(h;21,x,t;1) og derfor wêA;21. Er h= h;22 har man Re;w(h;22,x,t;1) og derfor wêA;22. Det følger at A;2 Inkl A;21UA;22. Dette avslutter beviset for Teorem 4. **Q.E.D.**

Fra beviset for Teorem 4 ser man at man ikke trenger hele forutsetningen C. I beviset for setningen brukes ikke noe av informasjonen om hvilke handlingsalternativer som er bedre enn andre. Bruker vi "C1" som forkortelse for konjunksjonen av de følgende åpne setninger ser man at Teorem 4 fortsatt holder om "C" erstattes med "C1".

(i) w;0êI & t;0,t;1, t;2êT & t;0 < t;1 <t;2
(ii) A;(x,t)(w;0) = {h;1,h;2}
(iii) (Aw)(wêI & Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t;0)–>
A;(x,t;1)(w) = {h;11,h;12}
(iv) (Aw)(wêI & Hist;(t;0)(w,w;0) ℜw(h;2,x,t;0) –>
A;(x,t;1)(w) = {h;21,h;22}

Den følgende setning er helt analog med Teorem 3, men angår de nederste grenene på figuren som har blitt gitt tidligere, nemlig grenene <h;2,h;21> og <h;2,h;22>.

Teorem 4.5 Anta lukningen av P1 holder. Anta videre at C holder og at man for alle wêI, têT, x og h har:

(+) Alt;w(h,x,t) –> Max(B, Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø.

Sett per definisjon: A;2 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t;0)). Da gjelder:

(i) Max(B, A;2) Inkl Mg(w: Re;w(h;21,x,t;1))
(ii) Max(B, A;2) Ω Mg(w: Re;w(h;21,x,t;1)) =ø

Bevis: Ved hjelp av den andre konjunkten i forutsetningen C følger Alt;(w;0)(h;2,x,t;0). Dette og (+) og definisjonen av A;2 innebærer at Max(B,A;2)≠ø. Fra dette og (i) i teoremet følger det andre punktet, punkt (ii). Det er derfor tilstrekkelig å bevise punkt (i).

Anta for vilkårlig w;1 at (1) w;1ê Max(B,A;2). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av A;2:

(2) w;1êMax(B, Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t;0)))

Siden man generelt har at Max(B,a) Inkl a om a er en mengde følger:

(3) Hist;(t;0)(w;1,w;0) & Re;(w;1)(h;2,x,t;0)

Fra dette og den tredje konjunkten i forutsetningen C følger at:

(4) A;(x,t;1)(w;1) ={h;21, h;22} & Be;(w;1,x,t;1)(h;21, h;22)

La oss, i analogi med det som ble gjort i beviset for Teorem 3, sette:

(5.1) d;1 = Mg(w: Hist;(t;1)(w,w;1) & Re;w(h;21,x,t;1))
(5.2) d;2 = Mg(w: Hist;(t;1)(w,w;1) & Re;w(h;22,x,t;1))

Ved hjelp av Teorem 1 kan man da slutte at:

(6) Mg(w: Hist;(t;1)(w,w;1)) = d;1Ud;2 og (7) d;1Ω d;2 =ø.

Videre har vi på grunnlag av forutsetningen (+) at Max(B,d;1)≠ø og Max(B,d;2)≠ø. Dette, (2), (4), (5.1), (5.2), samt prinsippet P1 berettiger oss i å slutte at det må finnes s,t der:

(8) sêMax(B,d;1) & têMax(B,d;2) & sB*t.

Anta nå for reduktio ad absurdum at (9) w;1êd;2. Fra (9) og (8) følger at t må være minst like bra som w;1, dvs. (10) Br(t,w;1). Nå har man åpenbart i lys av (1) at w;1êA;2. Hvis man derfor kan vise at d;1 Inkl A;2 vil man ha at

sêd;1 Inkl A;2 & w;1êA;2 & sB*w;1. Da kan ikke w;1 være noe maksimalt element i A;2. Dette strider mot (1). La oss derfor anta for reduktio ad absurdum at det finnes q der:

(12) qêd;1 & ¬(qêA;2)

Siden qêd;1 følger:

(13) Hist;(t;1)(q,w;1) & Re;q(h;21,x,t;1)

Fra den første konjunkten her følger (14) Hist;(t;0)(w,w;1). Setter man:

A;1 = Mg(w: Hist;(t,0)(w.w;0) & Re;w(h;1,x,t;0)) har man at A;1ΩA;2=ø og at A;1U A;2 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0). Dette følger fra Teorem 1 og forutsetningene som inngår i C. Siden t;1>t;0 følger fra (13) at Hist;(t;0)(q,w;1). Men fra dette og (3) følger Hist;(t;0)(q,w;0). Siden q ikke er med i A;2 har man derfor at qêA;1. Herav følger: Hist;(t;0)(q,w;0) & Re;q(h;1,x,t;0). Dette og forutsetningen C impliserer at (15) A;(x,t;1)(q) = {h;11,h;12}. Men fra (13) og A7 følger h;21êA;(x,t)(q). Dette strider mot (15) siden den siste konjunkten i forutsetningen C impliserer at alle handlingsalternativene er distinkte. Det kan derfor ikke finnes noen q som er slik at (12) holder. Herav har man at d;1 Inkl A;2.

Fra det som er godtgjort så langt følger at det er umulig at w;1êd2. Vi må imidlertid som avslutning vise at w;1êd1. Det vil da være tilstrekkelig å vise at følgende holder: (16) w;1ê(d1 U d2). Nå har man fra (4) at A;(x,t;1)(w;1)≠ø. Fra dette følger ved hjelp av A19 at:

(Eh)(Alt;(w;1)(h,x,t;1) & Re;(w;1)(h,x,t;1)). Det må med andre ord finnes h slik at:

(17) Alt;(w;1)(h,x,t;1) & Re;(w;1)(h,x,t;1).

Nå har man A;(x,t;1)(w;2) = {h;21,h;22}. Det følger derfor at h=h;21 eller at h=h;22. I det første tilfelle følger ved hjelp av (17) at Re;(w;1)(h;21,x,t;1) og derfor Hist;(t;1)(w;1,w;1) & Re;(w;1)(h;21,x,t;1). Herav følger i lys av definisjonen av d1 at w;1êd1. I det andre tilfelle har man på lignende vis:

Hist;(t;1)(w;1,w;1) & Re;(w;1)(h;22,x,t;1) og derfor w;1êd2. I begge tilfelle holder w;2ê(b1Ub2). Dette viser at (16) holder og avslutter dermed vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 4.6 Anta lukningen av P1 holder. Anta videre at C holder og at man for alle wêI, têT, x og h har:

(+) Alt;w(h,x,t) –> Max(B, Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø.

Anta videre at

w;1êMax(B,Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;1,x,t;0) & Re;w'(h;11,x,t;1)))

og w;2êMax(B,Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;1,x,t;0) & Re;w'(h;12,x,t;1)))

Da gjelder: w;1B*w;2.

Bevis: Bruker man definisjonene fra Teorem 4 ser man at det forutsettes at:

(1) w;1êMax(B,A;11) & w;2êMax(B,A;12).

Dette innebærer:

(2a) w;1ê Max(B, A;1Ω Mg(w': Re;w'(h;11,x,t;1)))

(2b) w;2ê Max(B, A;1Ω Mg(w': Re;w'(h;12,x,t;1)))

Fra Teorem 3 følger det nå at det finnes w' slik at:

(3) w'êMax(B,A;1) & Re;w'(h;11,x,t;1)

Fra (2a) følger åpenbart:

(4) (Az)(zêA;1Ω Mg(w': Re;w'(h;11,x,t;1)) –> Br(w;1,z))

Fra (3) følger:

(5) (Az)(zêA;1 –> Br(w',z)). Fra (3) og (4) følger at (6) Br(w;1,w'). Fra (2a) kan man slutte w;1êA;1. Dette og (5) gir en Br(w',w;1). I lys av (6) har man derfor at w;1 og w' er like bra, med andre ord: w'Lw;1.

Poenget er nå å vise at w;1B*w;2. Fra (2b) følger:

w;2êMax(B,Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;1,x,t;0) & Re;w'(h;12,x,t;1)))

Fra dette kan man slutte:

Hist;(t;0)(w;2,w;0) & Re;w;2(h;1,x,t;0) & Re;w;2(h;12,x,t;1)

Fra de to første konjunktene her og den fjerde klausulen i forutsetningen C kan man fra dette trekke den slutning at:

A;(x,t;1)(w;2) = {h;11,h;12} & Be;(w;2,x,t)(h;11,h;12)

Vi setter nå per definisjon:

q;1 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2) & Re;w'(h;11,x,t;1))

q;2 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2) & Re;w'(h;12,x,t;1))

Ved hjelp av Teorem 1 følger da:

q;1Ωq;2 = ø & Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2)) = q;1Uq;2. Videre følger ved hjelp av forutsetningen (+) at Max(B,q;1)≠ø & Max(B,q;2) ≠ø. Alt dette impliserer ved hjelp av P1 at det finnes s og t der man har:

sêMax(B,q;1) & sB*t & têMax(B,q;2)

Nå har man fra (2b) at Re;(w;2)(h;12,x,t;1). Videre har man åpenbart at Hist;(t;1)(w;2,w;2). Fra disse to ting og definisjonen av q;2 kan man trekke den slutning w;2êq;2. Det følger derfor at sB*w;2. kan man nå vise at

(7) q;1 Inkl A;2 vil vi ha vist at w;2 ikke kan være noe maksimalt element i A;2 og derfor at w;1B*w;2, siden w'êMax(B,A;1) (Jmf. (3)) og w'Lw;1. La oss derfor forsøke å vise at (7) holder.

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes z der man har:

(8) zêq;1 & ¬(zêA;1). Siden zêq;1 følger:

Hist;(t;1)(z,w;2) & Re;z(h;11,x,t;1). Dette innebærer Hist;(t;0)(z,w;2) & Re;z(h;11,x,t;1) siden t;0 < t;1. Men Hist;(t;0)(w;2,w;0) og siden Hist;t er en ekvivalensrelasjon må man derfor ha:

Hist;(t;0)(z,w;0) & Re;z(h;11,x,t;1).

Nå er ¬(zêA;1). Setter man A;2 = Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0)& Re;w'(h;2,x,t;0)) følger ved hjelp av Teorem 4 at A;1ΩA;2=ø Man må derfor ha zêA;2. Men da følger ved hjelp av den fjerde klausulen i C at A;(x,t;1)(z)= {h;21,h;22}. Men siden Re;z(h;11,x,t;1) har man h;11êA;(x,t;1)(z) og derfor at h;11ê{h;21,h;22}. Dette er umulig i lys av den femte klausulen i forutsetningen C. Det følger at

q;1 Inkl A;1. Dette avslutter beviset for Teorem 6. **Q.E.D.**

Teorem 4.7 Anta lukningen av P1 holder. Anta videre at C holder og at man for alle wêI, têT, x og h har:

(+) Alt;w(h,x,t) –> Max(B, Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø.

Anta videre at

w;1êMax(B,Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;2,x,t;0) & Re;w'(h;21,x,t;1)))

og w;2êMax(B,Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;2,x,t;0) & Re;w'(h;22,x,t;1)))

Da gjelder: w;1B*w;2.

Bevis: Beviset for denne satsen blir i hovedtrekkene som beviset for Teorem 6. La oss for tydelighetens skyld gjennomføre det i detalj. Bruker man definisjonene fra Teorem 4 ser man at det forutsettes at:

(1) w;1êMax(B,A;21) & w;2êMax(B,A;22).

Dette innebærer:

(2a) w;1ê Max(B, A;2Ω Mg(w': Re;w'(h;21,x,t;1)))

(2b) w;2ê Max(B, A;2Ω Mg(w': Re;w'(h;22,x,t;1)))

Fra Teorem 5 følger det nå at det finnes w' slik at:

(3) w'êMax(B,A;2) & Re;w'(h;21,x,t;1)

Fra (2a) følger åpenbart:

(4) (Az)(zêA;2Ω Mg(w': Re;w'(h;21,x,t;1)) –> Br(w;1,z))

Fra (3) følger:

(5) (Az)(zêA;2 –> Br(w',z)). Fra (3) og (4) følger at (6) Br(w;1,w'). Fra (2a) kan man slutte w;1êA;2. Dette og (5) gir en Br(w',w;1). I lys av (6) har man derfor at w;1 og w' er like bra, med andre ord: w'Lw;1.

Poenget er nå å vise at w;1B*w;2. Fra (2b) følger:

w;2êMax(B,Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;2,x,t;0) & Re;w'(h;21,x,t;1)))

Fra dette kan man slutte:

Hist;(t;0)(w;2,w;0) & Re;w;2(h;2,x,t;0) & Re;w;2(h;22,x,t;1)

Fra de to første konjunktene her og den fjerde klausulen i forutsetningen C kan man fra dette trekke den slutning at:

A;(x,t;1)(w;2) = {h;21,h;22} & Be;(w;2,x,t)(h;21,h;22)

Vi setter nå per definisjon:

q;1 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2) & Re;w'(h;21,x,t;1))

q;2 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2) & Re;w'(h;22,x,t;1))

Ved hjelp av Teorem 1 følger da:

q;1Ωq;2 = ø & Mg(w': Hist;(t;1)(w',w;2)) = q;1Uq;2. Videre følger ved hjelp av forutsetningen (+) at Max(B,q;1)≠ø & Max(B,q;2) ≠ø. Alt dette impliserer ved hjelp av P1 at det finnes s og t der man har:

sêMax(B,q;1) & sB*t & têMax(B,q;2)

Nå har man fra (2b) at Re;(w;2)(h;22,x,t;1). Videre har man åpenbart at Hist;(t;1)(w;2,w;2). Fra disse to ting og definisjonen av q;2 kan man trekke den slutning w;2êq;2. Det følger derfor at sB*w;2. kan man nå vise at

(7) q;1 Inkl A;2 vil vi ha vist at w;2 ikke kan være noe maksimalt element i A;2 og derfor at w;1B*w;2, siden w'êMax(B,A;2) (Jmf. (3)) og w'Lw;1. La oss derfor forsøke å vise at (7) holder.

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes z der man har:

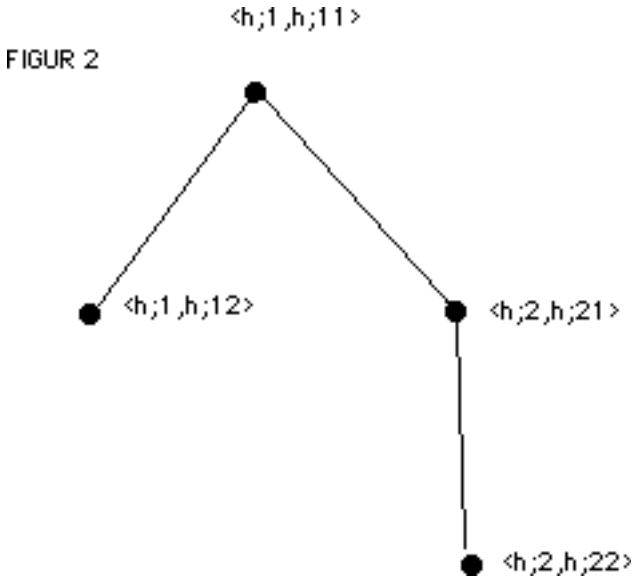
(8) zêq;1 & ¬(zêA;2). Siden zêq;1 følger:

Hist;(t;1)(z,w;2) & Re;z(h;21,x,t;1). Dette innebærer Hist;(t;0)(z,w;2) & Re;z(h;21,x,t;1) siden t;0 < t;1. Men Hist;(t;0)(w;2,w;0) og siden Hist;t er en ekvivalensrelasjon må man derfor ha:

Hist;(t;0)(z,w;0) & Re;z(h;21,x,t;1).

Nå er ¬(zêA;2). Setter man A;1 = Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0)& Re;w'(h;1,x,t;0)) følger ved hjelp av Teorem 4 at A;1ΩA;2=ø Man må derfor ha zêA;1. Men da følger ved hjelp av den fjerde klausulen i C at A;(x,t;1)(z)= {h;11,h;12}. Men siden Re;z(h;21,x,t;1) har man h;21êA;(x,t;1)(z) og derfor at h;21ê{h;11,h;12}. Dette er umulig i lys av den femte klausulen i forutsetningen C. Det følger at

q;1 Inkl A;2. Dette avslutter beviset for Teorem 7. **Q.E.D.**



FIGUR 2

Man ser fra Teorem 6 og 7 at hvis man tar for seg grenene <h;1,h;11> og <h;1,h;12> i treet som er avbildet på figuren som ble gitt tidligere så vil de beste av elementene som er assosiert med den første grenen være bedre enn de beste verdenene assosiert med den andre grenen. Det samme gjelder om man betrakter grenene <h;2, h;21> og <h;2,h;22>. Har vi vist at grenen <h;1,h;11> i det nevnte tre, altså den som befinner seg øverst er bedre enn grenen <h;2, h;21>? Strengt tatt har vi ikke bevist noen sats som direkte sier dette. La oss derfor gjøre det:

Teorem 4.8 Anta lukningen av P1 holder. Anta videre at C holder og at man for alle wêI, têT, x og h har:

(+) Alt;w(h,x,t) –> Max(B, Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø.

Anta videre at

w;1êMax(B,Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;1,x,t;0) & Re;w'(h;11,x,t;1)))

og w;2êMax(B,Mg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;2,x,t;0) & Re;w'(h;21,x,t;1)))

Da gjelder: w;1B*w;2.

Bevis: La oss benytte definisjonene fra Teorem 4. Da har vi i lys av forutsetningene at (1) w;1êMax(B,A;11) og (2) w;2êMax(B,A;21). Fra den andre klausulen i forutsetningen C samt (+) følger at

(3) Max(B,A;1)≠ø og Max(B,A;2)≠ø. Fra Teorem 3 følger at

(4) Max(B,A;1) Inkl Mg(w: Re;w(h;11,x,t;1). Fra (3) har vi at det finnes noe a der

(5) aêMax(B,A;1). Dette impliserer at (6) (Az)(zêA;1 –> Br(a,z)). Tilsvarende har man fra (1) at:

(7) (Az)(zêA;11 –> Br(w;1,z)). I lys av definisjonen av A;11 er dette ekvivalent med:

(8) (Az)(zêA;1ΩMg(w: Re;w(h;11,x,t;1) –> Br(w;1,z). Nå har man at (9) A;11 Inkl A;1. Fra dette (1) og (6) følger at Br(a,w;1). Videre har vi fra (4) og (5) at aêA;1Ω Mg(w: Re;w(h;11,x,t;1). Fra dette og (8) følger Br(w;1,a). Vi har derfor både Br(w;1,a) og Br(a,w;1). Dette innebærer (11) aLw;1.

Fra Teorem 5 kan man slutte (12) Max(B,A;2) Inkl Mg(w: Re;w(h;21,x,t;1)) Fra (3) følger at det finnes noe b der bêMax(B,A;2). Herav kan man slutte (13) (Az)(zêA;2 –> Br(b,z)). Fra (2) har man i lys av definisjonen av A;21 at

(14) (Az)(zêA;2ΩMg(w: Re;w(h;21,x,t;1) –> Br(w;2,b)). Vi har
(15) A;21 Inkl A;2. Fra dette, (2) og (13) følger Br(b,w;2). Tilsvarende har man fra (12) og det forhold at bêMax(A;2) at bêA;2Ω Mg(w: Re;w(h;21,x,t;1)). Dette og (14) gir en Br(w;2,b). Man har altså (16) w;2 L b. Men

aêMax(B,A;1) & bêMax(B,A;2)

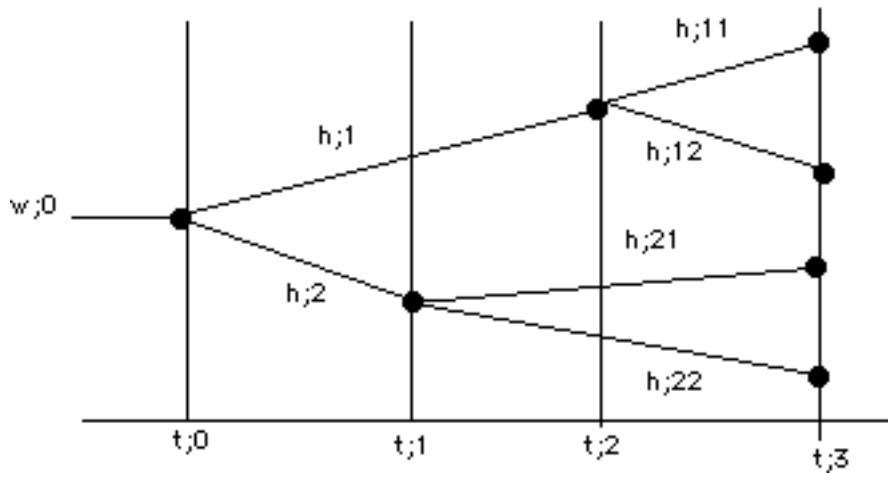
Videre har man at Alt;(w;0)(hi,x,t;0) (i=1,2) & Br;(w;0,x,t)(h;1,h;2). Det følger da ved hjelp av P1 at aB* b. I lys av (11) og (16) kan man da på basis av aksiomene for Br slutte at w;1 B* w;2. Dette avslutter beviset for Teorem 8. **Q.E.D.**

Vi har så langt sett på den enkle situasjonen som er avbildet på Figur 1 og som er presist angitt ved betingelsen C. Men det er en del andre muligheter som det også er nærliggende å betrakte. På Figur 1 har vi forutsatt at de alternativene som x kan velge mellom etter å ha valgt et av alternativene h;1 eller h;2 i alle tilfellene står åpne ved tidspunktet t;1. Men man kan her godt tenke seg en situasjon som snarere er som på Figur 3 nedenfor. Denne kan presist angis ved den følgende betingelse, C2, som er konjunksjonen av de følgende åpne setninger:

(i) w;0êI & t;0,t;1,t;2,t;3êT & t;0 < t;1 <t;2 < t;3
(ii) A;(x,t)(w;0) = {h;1,h;2} & Be;(w;0,x,t)(h;1,h;2)
(iii) (Aw)(wêI & Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t;0)–>
A;(x,t;2)(w) = {h;11,h;12} & Be;(w,x,t;1)(h;11,h;12)
(iv) (Aw)(wêI & Hist;(t;0)(w,w;0) ℜw(h;2,x,t;0) –>
A;(x,t;1)(w) = {h;21,h;22} & Be;(w,x,t;1)(h;21,h;22)
(v) Cd({h;1,h;2,h;11,h;12,h;21,h;22}) =6
(vi) (Aw)(At)(wêI & Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t;0) &
(têt;0,t;2> v têt;2,t;3>). –> A;(x,t)(w) = ø
vii) (Aw)(At)(wêI & Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t;0) &
(têt;0,t;1> v têt;1,t;3>). –> A;(x,t)(w) = ø

Teoremer som er helt analoge med Teorem 3 – Teorem 8 kan utledes om man i stedet for C bruker betingelsen C2.

FIGUR 3



Den følgende sats er av interesse fordi den bringer den deontiske operatoren Skal;t inn i bildet.

Teorem 4.9 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h'≠h –> Be;(w,x,t)(h,h'))

(ii) (Ah)(Alt;w(h,x,t) –> Max(B,Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø)

(iii) μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t)) êE(t)

Da gjelder:

(a) wêSkal;t(μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))))

Bevis: Vi har at den påstanden vi skal vise, (a), i lys av definisjonen av operatoren Skal;t er ekvivalent med de følgende to formler:

(1) μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t)))êE(t)

(2) ø≠ Max(B,H;(t,w)) Inkl Mg(w: Re;w(h,x,t))

Når det gjelder (2) kan det være verdt å minne om at H;(t,w) er mengden av alle de logisk mulige verdenene som er historisk identiske med w opp til og inkludert tidspunktet t. Man har altså H;(t,w) = Mg(w': w'êI & Hist;t(w',w)).

I beviset for satsen skal vi forutsette prinsippene P1 – P3. Siden (1) er identisk med forutsetningen (iii) er det tilstrekkelig å bevise (2). Siden Max(B,H;(t,w)) er inkludert i H;(t,w) er det enn mer tilstrekkelig å bevise:

(3) ø≠ Max(B,H;(t,w)) Inkl H(t,w)Ω Mg(w: Re;w(h,x,t))

La oss først bevise:

(4) Max(B,H;(t,w)) Inkl H(t,w)Ω Mg(w: Re;w(h,x,t))

La oss sette (5) f;(w,x,t)(h) = Mg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t)). Teorem 1 sier da at f;(w,x,t) er en funksjon som avbilder A;(x,t)(w) på en mengde innbyrdes disjunkte og ikke-tomme delmengder av H;(t,w) som samlet uttømmer denne mengden H;(t,w). For å bevise (4) anta for reduktio ad absurdum at det finnes w1 der:

(6) w1êMax(B,H;(t,w)) & ¬(w1êH(t,w)Ω Mg(w: Re;w(h,x,t)))

Fra den første konjunkten i (6) følger i lys av definisjonen av Max at w1êH;(t,w). Fra dette og den andre konjunkten i (6) følger:

(7) ¬(w1êMg(w: Re;w(h,x,t)))

Siden w1êH;(t,w) har man ved hjelp av Teorem 1 at:

(8) w1êf(w,x,t)(h') for noe h'êA;(x,t)(w)

Nå har man at hêA;(x,t)(w) og derfor i lys av forutsetning (ii) at Max(B,f;(w,x,t)(h))≠ø. Det følger derfor at det finnes z0 der man må ha:

(9) z0êMax(B,f;(w,x,t)(h))

Siden h'êA;(x,t)(w) har man også at Max(B,f;(w,x,t)(h'))≠ø. Det følger at det må finnes z1 slik at:

(10) z1êMax(B,f;(w,x,t)(h')). Nå har man i lys av definisjonen av f at

(11) f;(w,x,t)(h), f;(w,x,t)(h') Inkl H;(t,w)

Videre må man ha at h'≠h for ellers ville man ha ved hjelp av (5) og (8) w1êMg(w: Re;w(h,x,t)), noe som strider mot (7). Fra den første forutsetningen følger det at Be;<w,x,t>(h,h'). Fra dette, (9), (10) og P1 følger at

(12) z0B* z1

Nå har man imidlertid at w1êf;(w,x,t)(h') Inkl H;(t,w) og at w1êMax(B,H;(t,w)). Det følger at w1êMax(B,f;(w,x,t)(h')). Fra dette og (10) følger z1Lw1. Dette og (12) gir en z0B*w1 og z0êH;(t,w). Dette strider mot at w1 er et B-maksimalt element i H;(t,w) og gir oss en motsigelse. Dette viser at (4) holder.

For å gi et fullstendig bevis for satsen er det imidlertid også nødvendig å gi et bevis for den første halvdelen av (3). Man må altså vise at Max(B,H;(t,w))≠ø.

La oss gjøre dette: Vi har hêA;(x,t)(w). Fra dette følger ved hjelp av forutsetning (ii) at

Max(B,f;(w,x,t)(h))≠ø og derfor at det finnes noe w0 slik at:

(13) w0êMax(B, f;(w,x,t)(h)) Siden f;(w,x,t)(h) Inkl H;(t,w) har vi:

(14) w0êH;(t,w). (Se definisjonen av funksjonen f i denne forbindelse).

Vi ønsker nå å vise at (Aw')(w'êH;(t,w) –> w0Bw'). Det vil i så fall følge at w0 er et B-maksimalt element i H;(t,w). Anta derfor for vilkårlig w' at w'êH;(t,w). Fra dette følger ved hjelp av Teorem 1 at det finnes h'êA;(x,t)(w) slik at

(15) w'êf;(w,x,t)(h')

Det er nå to muligheter. Tilfelle (i): h'=h. I så tilfelle har man w'êf;(w,x,t)(h) og derfor i lys av (13) at w0Bw'. Tilfelle (ii): h'≠h. Da har man i lys av den andre forutsetningen at

(16) Be;<w,x,t>(h,h') Siden h'êA;(x,t)(w) har vi i lys av forutsetning (ii) at det finnes w1 der:

(17) w1êMax(B,f;(w,x,t)(h')). Fra dette og (15) følger:

(18) w1Bw'. Men fra (13), (16) og (17) følger ved hjelp av P1 at w0B*w1. Dette og (18) impliserer w0Bw'.

Man har derfor at (Aw')(w'êH;(t,w) –> w0Bw') og følgelig at Max(B,H;(t,w))≠ø. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Den følgende sats bevises i hovedsak på akkurat samme måte som det forrige teoremet. De endringene som skal til er så enkle at leseren selv kan utføre dem.

Teorem 4.10 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h'≠h –> Be;(w,x,t)(h,h'))

(ii) (Ah)(Alt;w(h,x,t) –> Max(B,Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø)

Da gjelder:

(a) wêSkal@;t(μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))))

Man ser at betingelsen (i) er ekvivalent med Pb;<w,t>(h,x). Man kan derfor si at teoremet viser at gitt betingelsen (ii) har man at følgende holder:

(‡) Pb;<w,t>(h,x) –> wêSkal@;t(μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))))

Tillater man seg en litt unøyaktig lesemåte sier denne setningen at dersom h er et handlingsalternativ som det er påbudt at x utfører ved t så skal det ideelt sett være slik at x realiserer alternativet h fra og med tidspunktet t.

Man kan spørre om kondisjonalen den andre veien i (‡) holder under forutsetning av at (ii) holder. Vi skal se på dette etterhvert. La oss først betrakte det følgende teorem som er analogt med Teorem 4.10:

Teorem 4.11 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;(w,x,t)(h,h'))

(ii) (Ah)(Alt;w(h,x,t) –> Max(B,Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø)

Da gjelder:

(a) wêTil@;t(μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))))

Bevis: Anta at forutsetningene holder. Vi ønsker da å bevise:

(+) wêTil@;t(μ;-1(Mg(w:Re;w(h,x,t))))

La oss først se på hva (+) innebærer. Vi har at (+) per definisjoner ekvivalent med:

(1) wêNeg(Skal@;t(Neg(μ;-1(Mg(w:Re;w(h,x,t)))))))

La oss sette a0 = μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))) slik at det blir lettere å rette oppmerksomheten mot den vesentlige strukturen i uttrykket (1). Vi har da:

(2) wêμ;-1(Til@;t(a0)) <–> wêμ;-1(Neg(Skal@;t(Neg(a0))))

<–> wê(I – μ;-1(Skal@;t(Neg(a0))))
<–> wêI & ¬(wêμ;-1(Skal@;t(Neg(a0))))
<–> wêI & ¬(wêI &ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(a0)))
<–> wêI& ¬(ø≠ Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(a0)))
<–> wêI &(ø≠ Max(B, H;(t,w)) –>
¬(Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(a0))))

Vi har derfor at (1) er ekvivalent med:

(3) wêI &(ø≠ Max(B, H;(t,w)) –>
¬(Max(B, H;(t,w)) Inkl μ;-1(Neg(a0))))

Det vil altså være tilstrekkelig å vise at (3) holder under forutsetningene i teoremet. I det følgende setter vi per definisjon:

f;(w,x,t)(h) = Mg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t))

Anta for reduktio ad absurdum at (3) ikke holder, med andre ord anta:

(4.1) wêI & Max(B,H;(t,w))≠ø og
(4.2) (Aw)(wêMax(B,H;(t,w)) –> ¬(wêμ(a0)))

Dette siste innebærer når man har vår definisjon av "a0" i tankene at:

(4.2.1) (Aw)(wêMax(B,H;(t,w)) –> ¬(wêμ(μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))))))

Fra (4.1) følger det at det finnes noe w1 der man har:

(5) w1êMax(B,H;(t,w)) Fra dette følger:
(6) w1êH;(t,w)

Fra (6) følger siden vi i lys av Teorem 4.1 har at

H;(t,w)= UN/hêA;(x,t)(w)/(f;(w,x,t)(h))

at det finnes h1êA;(x,t)(w) slik at

(7) w1êf;(w,x,t)(h1) Nå har man:
(8) f;(w,x,t)(h1) Inkl H;(t,w). Videre har man i lys av forutsetning (ii) og definisjonen av f at:
(9) Max(B,f;(w,x,t)(h1))≠ø.

Fra (5), (7) og (8) følger (10) w1êMax(B,f;(w,x,t)(h1))

Nå har man fra forutsetning (i) at Alt;w(h,x,t). Fra dette og forutsetning (ii) følger Max(B,f;(w,x,t)(h))≠ø og derfor at det finnes w2 slik at:

(11) w2êMax(B,f;(w,x,t)(h))

Nå følger det også fra det at h1êA;(x,t)(w) og den første forutsetningen at

(12) Mb;(w,x,t)(h,h1)

Fra dette, P2, det at Alt;w(h,x,t) &Alt;w(h1,x,t) og (10) følger (13) w2Bw1. Men fra (11) har man w2êMax(B,f;(w,x,t)(h)) Inkl H;(t,w) og derfor w2êH;(t,w). Fra dette, (5) og (13) følger at w2Lw1 og derfor at w2êMax(B,H;(t,w)). Fra dette og (4.2.1) følger imidlertid ¬(w2êMg(w': Re;w'(h,x,t))). Det følger at

¬(w2êMg(w': Hist;t(w',w)& Re;w'(h,x,t))) og derfor at ¬(w2êMax(B,f;(w,x,t)(h))).

Men dette strider åpenbart mot (11). Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Man kan også betrakte:

Teorem 4.12 Anta følgende holder:

(i) C = Mg(h: Til;<w,t>(h,x)) & C≠ø
(ii) (Ah)(Alt;w(h,x,t) –> Max(B,Mg(w': Hist;t(w',w) ℜw'(h,x,t)))≠ø)

Da gjelder:

(a) wêμ(Skal@;t(μ;-1(UN/hêC/[Mg(w: Re;w(h,x,t))])))

Bevis: Anta (1) ø≠C = Mg(h: Til;<w,t>(h,x)) og at

(2) (Ah)(Alt;w(h,x,t) –> Max(B,Mg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t))≠ø

Som i de foregående bevis setter vi:

(3) f;(w,x,t)(h) = Mg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t))

I lys av denne definisjonen kan (2) reformuleres slik:

(2.1) (Ah)(Alt;w(h,x,t) –> Max(f;(w,x,t)(h)≠ø)

Vi skal vise:

(+) wêμ-1(Skal@;t(μ;-1(UN/hêC/[Mg(w: Re;w(h,x,t))])))

Vi setter :

Q;(x,t) = μ;-1(UN/hêC/[Mg(w: Re;w(h,x,t))]) I lys av definisjonen av operatoren Skal@ vil det være tilstrekkelig å bevise:

(++) ø≠Max(B, H;(t,w)) Inkl Q;(x,t)

Det vi altså være tilstrekkelig å bevise følgende to ting:

(4.1) ø≠Max(B,H;(t,w))

(4.2) (Aw')(w'êMax(B, H;(t,w)) –> w'êQ;(x,t)

La oss først gi vise (4.1). Fra (1) følger at det finnes noe h0 der (5) Til;<w,t>(h0,x). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av Til:

(5.1) Alt;w(h,x,t)

(5.2) (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h0,h'))

Siden (5.1) holder har man hêA;(x,t)(w). Fra dette, (2) og definisjonen av f;(w,x,t) følger:

Max(B,f;(w,x,t)(h))≠ø og derfor at det finnes w1 slik at

(6) w1êMax(B,f;(w,x,t)(h))

Man har at f;(;(w,x,t)(h) Inkl H;(t,w). Det følger at w1êH;(t,w). Vi ønsker nå å vise at (Aw')(w'êH;(t,w) –> w1Bw'). w1 vil i så fall være et B-maksimalt element i H;(t,w). Herav følger så (4.1). Anta derfor for vilkårlig w' at (7) w'êH;(t,w). Man har da ved hjelp av Teorem 4.1 at det finnes noe h1êA;(x,t)(w) slik at

(7.1) w'êf;(w,x,t)(h1)

Siden Alt;w(h1,x,t) følger fra (2) at det finnes w2 slik at

(8) w2êMax(B, f;(w,x,t)(h1)) Inkl H;(t,w)

Fra dette og (7.1) følger:

(9) w2Bw' Siden h1êA;(x,t)(w) har man ved hjelp av (5.2) at

(10) Mb;<w,x,t>(h0,h1)

Fra dette, (6), (8) og P2 følger w1Bw2 som i lys av (9) gir en w1Bw'. Siden w' var et vilkårlig element i H;(t,w) har man (Aw')(w'êH;(t,w) –> w1Bw'). Siden w1êH;(t,w) følger det at (4.1) holder.

Vi vender oss nå mot beviset for (4.2). Anta for vilkårlig w' at

(11) w'êMax(B, H;(t,w)) Da har man w'êH;(t,w) og derfor i lys av Teorem 4.1 at det finnes h0êA;(x,t)(w) slik at

(12) w'êf;(w,x,t)(h0). Det vil nå være tilstrekkelig å bevise

(13) Til;<w,t>(h0,x) Grunnen er at man har:

(14) w'êQ;(x,t) <–> w'êμ;-1(UN/hêC/(Mg(w": Re;(w")(h,x,t))))
<–> (Eh)(hêC & w'ê Mg(w": Re;(w")(h,x,t)))
<–> (Eh)(hêC & Re;w'(h,x,t))
<–> (Eh)(Til;<w,t)(h,x) & Re;w'(h,x,t))

Fra (12) følger w'êMg(w": Hist;t(w",w) & Re;(w")(h0,x,t)). Dette impliserer Re;w'(h0,x,t). Men sammen med (13) impliserer dette høyre side i (14).

Anta for reduktio ad absurdum at (13) ikke holder, dvs. at ¬Til;<w,t>(h0,x). Siden h0êA;(x,t)(w) følger da ved hjelp av definisjonen av Til om vi forutsetter sammenligningsloven for Mb at det finnes h1 der:

(15) Alt;w(h1,x,t)

(16) Be;<w,x,t>(h1,h0)

Fra (15) og (2) ovenfor følger at det finnes w2 slik at

(17) w2êMax(B, f;(w,x,t)(h1))

Fra (11) og (12) har man (18) w'êMax(B, f;(w,x,t)(h0)) siden f;(w,x,t)(h0) er inkludert i H;(t,w). Fra (16), (17), (18) og prinsippet P1 følger

(19) w2B*w' Men w2êf;(w,x,t)(h1) Inkl H;(t,w). (19) strider derfor mot at w' er et maksimalt element i H;(t,w). Dette viser at (13) holder og avslutter dermed beviset for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 4.13 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h,x,t)

(ii) (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Max(B, Mg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t)))≠ø

(iii) wêμ(Skal@;t(μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))))

Da gjelder Pb;<w,t>(h,x).

Som man ser er dette den omvendte setning til Teorem 4.10 og viser derfor at et positivt svar på spørsmålet som ble stilt ovenfor er korrekt.

Bevis: Anta forutsetningene holder. Den tredje forutsetningen impliserer:

(1) ø≠Max(B, H;(t,w)) Inkl H;(t,w)Ω Mg(w': Re;w'(h,x,t))

I lys av forutsetning (i) er det tilstrekkelig å bevise:

(2) (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h'≠h. –> Be;<w,x,t>(h,h'))

Fra (1) følger eksistensen av noe w1 der man har:

(3) w1êMax(B,H;(t,w))

Videre følger: (4) w1êf;(w,x,t)(h) Inkl H;(t,w). Fra (3) og (4) følger det at man må ha (5) w1êMax(B, f;(w,x,t)(h)).. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes h1 der:

(6) Alt;w(h1x,t) & h1≠h & Mb;<w,x,t>(h1,h)

Fra forutsetning (ii) og den første konjunkten i (6) følger:

(7) Max(B,f;(w,x,t)(h1)) ≠ø Herav følger at det finnes noe w2 der:

(8) w2êMax(B, f;(w,x,t)(h1)).

Siden h1≠h har man ved hjelp av Teorem 4.1 at

(9) f;(w,x,t)(h1) Ω f;(w,x,t)(h) = ø

Fra (5), den siste konjunkten i (6), (8), samt prinsippet P2 følger:

(10) w2Bw1

Fra (9) og (1) følger: (11) Max(B,H;(t,w)) Ω f;(w,x,t)(h1) = ø. Fra (8) og (11) følger:

(12) ¬(w2êMax(B,H;(t,w))). Men siden w2êf;(w,x,t)(h1) har man:

(13) w2êH;(t,w). Anta nå w" er et vilkårlig objekt i H;(t,w). Fra dette og (3) følger w1Bw". Dette og(10) gir en: w2Bw". Man har derfor:

(14) (Aw")(w"êH;(t,w) –> w2Bw"). Fra (13) og (14) har man imidlertid w2êMax(B,H;(t,w)). Dette strider mot (12). Det følger at det ikke kan finnes h1 slik at (6) er oppfylt. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 4.14 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h,x,t)

(ii) (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Max(B, Mg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t)))≠ø)

(iii) wêμ(Til@;t(μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t)))))

(iv) Max(B,H;(t,w)) ≠ ø

Da gjelder: Til;<w,t>(h,x).

Bevis: Som i beviset for Teorem 4.11 ser man at forutsetning (iii) er ekvivalent med:

(1) wêI &(Max(B, H;(t,w))≠ø –>
(Ew)(wêMax(B,H;(t,w)) & wêMg(w': Re;w'(h,x,t))))

Fra dette og forutsetning (iv) følger eksistensen av w1 der:

(2) w1êMax(B,H;(t,w)) & w1êMg(w': Re;w'(h,x,t))

Herav har man: (3) w1êMax(B, f;(w,x,t)(h)). Vi ønsker å vise Til;<w.t>(h,x). I lys av forutsetning (i) er det tilstrekkelig å bevise:

(4) (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h'))

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes h1 slik at

(5) Alt;w(h1,x,t) & ¬Mb;<w,x,t>(h,h1). Det siste impliserer, i det vi forutsetter sammenlignbarhetsloven for Mb:

(6) Be;<w,x,t>(h1,h)

Fra (5) og forutsetning (ii) følger at det finnes w;2 der man har:

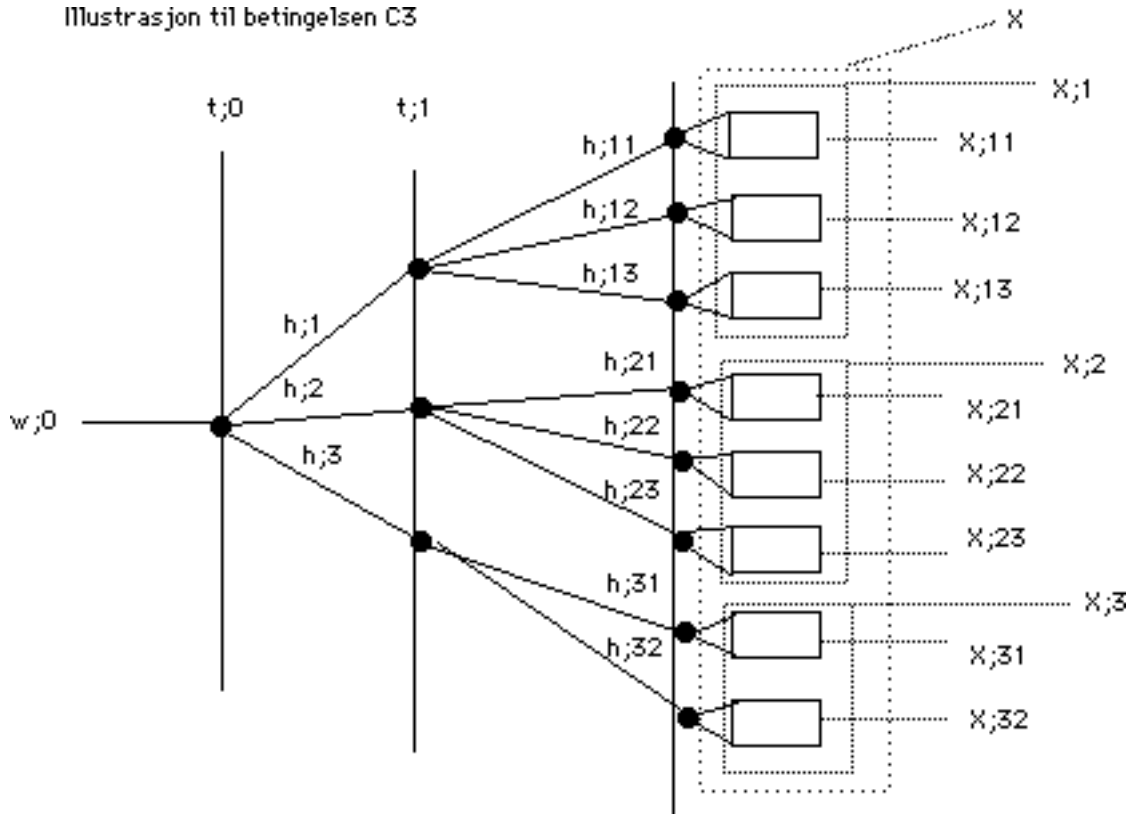
(7) w2êMax(B, f;(w,x,t)(h1))

Fra (3), (6), (7) og P1 følger (8) w2B* w1. Men w2êH;(t,w). Dette, (2) og (8) gir oss en motsigelse. Det følger at (4) holder. **Q.E.D.**

Vi skal studere ytterligere noen satser som kan utledes i teorien TML. For dette formål betrakter vi konjunksjonen av de følgende åpne setninger i språket til TML. Denne konjunksjonen betegnes i det følgende med "C3".

(i) w;0êI & t;0, t;1êT & t;0<t;1
(ii) Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0)) = X
(iii) A;(x,t;0)(w;0) = {h;1,h;2,h;3}
(iv) X;i = XΩMg(w: Re;w(h;i,x,t;0)) (i=1,2,3)
(v) X:1j = X;1Ω Mg(w: Re;w(h;1j,x,t;1)) (j=1,..,3)
(vi) X:2j = X;2Ω Mg(w: Re;w(h;2j,x,t;1)) (j=1,..,3)
(vii) X:3j = X;3Ω Mg(w: Re;w(h;3j,x,t;1)) (j=1,2)
(viii) (Aw)(wêX;1 –> A;(x,t;1)(w) = {h;11,h;12,h;13})
(ix) (Aw)(wêX;2 –> A;(x,t;1)(w) = {h;21,h;22,h;23})
(x) (Aw)(wêX;3 –> A;(x,t;1)(w) = {h;31,h;32})
(xi) (Aw)(Aw')(w,w'êX;i –> Hist;(t;1)(w,w')) (i=1,..,3)
(xii) (Aw)(Aw')(wêX;i & Hist;(t;1)(w,w') –> w'êX;i) (i=1,..,3)
(xii) Cd({h;1,h;2,h;3, h;11,h;12,h;13, h;21,h;22,h;23, h;31,h;32}) = 11
(xiii) (Aj)(jê{1,...,3} –> X;1j≠ø) & (Aj)(jê{1,...,3} –> X;2j≠ø)
(xiv) (Aj)(jê{1,2} –> X;3j≠ø)
(xv) X = UN/i,1,3/(X;i)
(xvi) X;1 = X;11UX;12U X;13 X;2= X;21U X;22U X;23
(xvii) X;3 = X;31UX;32

Den følgende figur illustrerer situasjonen angitt ved (i) – (xiv).



Teorem 4.15 Anta C3 holder. Da har man:

(a) (Ai)(Aj)(1≤i≠j≤3 –> X;iΩX;j =ø)
(b) (Ai)(Aj)(1≤i≠j≤3 –> X;1iΩX;1j =ø)
(c) (Ai)(Aj)(1≤i≠j≤3 –> X;2iΩX;2j =ø)
(d) (Ai)(Aj)(1≤i≠j≤2 –> X;3iΩX;3j =ø)

Bevis: Ad (a): Vi skal først vise at X;2 – X;3 er innbyrdes disjunkte. I denne forbindelse bemerker vi at det fra C3 følger at A;(x,t;0)(w;0) = {h;1, h;2,h;3} og at de diverse h;i'ene i denne mengden er distinkte. Anta for reduktio ad absurdum at 1≤i≠j≤3 og at X;iΩX;j ≠ø. Da finnes det w slik at wê(X;iΩ X;j). Fra dette og C3 følger:

wêMg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;i,x,t;0))
wêMg(w': Hist;(t;0)(w',w;0) & Re;w'(h;j,x,t;0))

Dette innebærer at

(1) Re;w(h;i,x,t;0) & Re;w(h;j,x,t;0)

Fra dette og A7 følger Alt;w(h;i,x,t;0) & Alt;w(h;j,x,t;0). Siden h;i≠h;j følger fra dette og A17 at ¬(Ew)(Re;w(h;i,x,t) & Re;w(h;j,x,t)). Dette strider åpenbart mot (1).

Ad (b): Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w slik at wê(X;1i Ω X;1j) og 1≤i≠j≤3. I lys av C3 (v) har man da:

(2) Re;w(h;2i,x,t;1) & Re;w(h;2j,x,t;1)

Fra dette og A7 følger Alt;w(h;2i,x,t;0) & Alt;w(h;2j,x,t;0). Siden h;2i≠h;2j følger fra dette og A17 at ¬(Ew)(Re;w(h;2i,x,t) & Re;w(h;2j,x,t)). Dette strider åpenbart mot (2).

De resterende punkter i satsen, (c) og (d) bevises på samme måte som punkt (b). Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Teorem 4.16 Anta C3 holder. Da gjelder:

(a) w;1êX;1–> X;1i = Mg(w: Hist;(t;1)(w;w1) ℜw(h;1i,x,t;1)) (i=1,..,3)

(b) w;1êX;2i–> X;2i = Mg(w: Hist;(t;1)(w;w1) ℜw(h;2i,x,t;1)) (i=1,..,3)
(c) w;1êX;3i–> X;3i = Mg(w: Hist;(t;1)(w;w1) ℜw(h;3i,x,t;1)) (i=1,2)

Vi gir bare et bevis for punkt (a) i denne satsen. De andre punktene bevises på samme måte. La oss først se på inklusjonen mot venstre i (a):

Anta anta w;1êX;1 og at Hist;(t;1)(w,w;1) & Re;w(h1i,x,t;1) der iê{1,..,3}. Da har man i lys av C3 (xii) at wêX;1, og derfor at

wêX;1ΩMg(w: Re;w(h;1i,x,t;1) = X;1i.

Når det gjelder inklusjonen mot høyre i (a): Anta wêX;1i og at w;1êX;1. Fra C3 (v), definisjonen av X;1i, følger da at (1) wê(X;1Ω Mg(w': Re;w'(h1i,x,t;1))). Siden w,w;1êX;1 har man da i lys av C3 (xi) at Hist;(t;1)(w,w;1). Fra dette og (1) følger at Hist;(t;1)(w,w;1) & Re;w(h1i,x,t;1). **Q.E.D.**

Teorem 4.17 Anta C3 og at det følgende holder:

(i) (Aa(aêPt(X) &a≠ø –> Max(B, a)≠ø)
(ii) Max(B,X) = Max(B, X;21)

Sett per definisjon b = μ;-1(Mg(w: Re;w(h2,x,t;0) & Re;w(h;21,x,t;1))
Da har man at følgende holder:

w;0êμ(Skal@;(t;0)(b))

Bevis: I lys av definisjonen av Skal@ og definisjonen av b vil det være tilstrekkelig å bevise:

(1) ø≠ Max(B,H;(t;0,w;0) Inkl μ(b)

Nå har man per definisjon at H;(t;0,w;0) = Mg(w: wêI & Hist;(t;0)(w,w;0)) = X.
Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise:

(2) ø≠Max(B,X) Inkl μ(b)

Fra forutsetning (i) i teoremet og C3 følger det at Max(B,X)≠ø. I lys av forutsetning (ii) er det derfor tilstrekkelig å bevise (3) X;21 Inkl μ(b) for å vise (2). Anta derfor for vilkårlig w at wêX;21. Herav følger ved hjelp av C3 at

wêX;2Ω Mg(w': Re;w'(h;21,x,t;1)). Fra dette og definisjonen av X;2 følger:

wêMg(w': Hist;(t;0)(w',w;0))Ω Mg(w': Re;w'(h;2,x,t;0))
Ω Mg(w': Re;w'(h;21,x,t;1) Inkl
Mg(w': Re;w'(h;2,x,t;0) ℜw'(h;21,x,t;1)) = μ(b)

Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 4.18 Anta C3 og at det følgende holder:

(i) (Aa(aêPt(X) &a≠ø –> Max(B, a)≠ø)
(ii) Max(B,X) = Max(B, X;21)

Da har man at følgende holder:

(a) Be;<w;0,x,t;0>(h;2,h;1)
(b) (Aw)(wêX;2 –> Be;<w,x,t;1>(h;21,h;22))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi må vise at

(1) Be;<w;0,x,t;0>(h;2,h;1)

Nå har man fra forutsetning (i) i teoremet at

(2) Max(B,x;2) ≠ø & Max(B,X;1)≠ø siden X;1 og X;2 i kraft av C3 er ikke-tomme delmengder av X. Fra dette følger at det må finnes w;1 og w;2 der:

(3) w;1êMax(B,X;1) & w;2êMax(B,X;2)

Siden X;21 Inkl X;2 og X;1ΩX;2=ø følger ved hjelp av forutsetning (ii) at

(4) w;2B* w;1

Nå har man:

(5.1) X;2 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;2,x,t;0)) og

(5.2) X;1 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;1,x,t;0))

Fra (3), (4), (5.1), (5.2) og prinsippet P1 følger så (1).

Vi må imidlertid også vise at (Aw)(wêX;2 –> Be;<w,x,t;1>(h;21,h;22))

Anta derfor at w er et vilkårlig objekt der wêX;2. I lys av Teorem 4.16 har man:

(6.1) X;21 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w) & Re;w'(h;21,x,t;1))

(6.2) X;22 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w) & Re;w'(h;22,x,t;1))

Man har videre at X;22 Ω X;21 =ø og at X;21, såvel som X;22, i lys av forutsetning (i) inneholder B-maksimale elementer. Det må derfor finnes w;1 og w;2 der:

(7) w;1êMax(B,X;21) & w;2êMax(B,X;22)

Siden Max(B,) = Max(B,X;21) følger da at (8) w;1B*w;2. Fra (6.1), (6.2), (7), (8) og prinsippet P1 følger at Be;<w,x,t;1)(h;21,h;22). Dette viser at påstanden holder. **Q.E.D.**

Teorem 4.19 Anta C3 og at det følgende holder:

(i) (Aa)(aêPt(X) &a≠ø –> Max(B, a)≠ø)

(ii) Max(B,X) Inkl (X;21 U X;22)

Da gjelder følgende:

(a) Pb;<w;0,t;0>(h;2,x)

(b) (Aw)(wêX;2 –> (Til;<w,t;1>(h;21,x) & Til;<w,t;1>(h;22,x))

Bevis: Anta (0) Ma(B,X) Inkl (X;21 U X;22). Vi skal først vise at Pb;<w;0,t;0)(h;2,x). Det vil i så fall i lys av definisjonen av Pb være tilstrekkelig å bevise:

(1) Alt;(w;0)(h;2,x,t;0) &

(Ah')(Alt;(w;0)(h',x,t;0) & h'≠h;2 –> Be;<w;0,x,t;0>(h;2,h'))

Siden X;21UX;22 Inkl X;2 Inkl X følger det at Max(B,X) Inkl X;2 og derfor at:

(2) Max(B,X;2) = Max(B,X)

Nå har man fra C3:

(3) A;(x,t;0)(w;0) = {h;1,h;2,h;3} Fra dette og (1) fremgår det at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(4) Be;<w;0,x,t;0>(h;2,h;1) & Be;<w;0,x,t;0>(h;2,h;3)

Fra forutsetningen om at:

(5) (Aa)(aêPt(X) &a≠ø –> Max(B, a)≠ø)

følger det at:

(6) ø≠ Max(B,X;i) for i= 1,...,3. Dette innebærer at det finnes w;1, w;2 og w;3 der man har:

(7) w;iêMax(B,X;i) for i= 1,...,3. Siden X;1, X;2 og X;3 er innbyrdes disjunkte, X = X;1 U X;2 U X;3 og (2) holder har man i lys av (7) at:

(8) w;2B*w;1 & w;2B* w;3. Fra (7), (8), prinsippet P1 samt det at:

X;i= Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;w(h;i,x,t;0) i=1,...,3 har man at (4) holder.

Vi må imidlertid også vise:

(Aw)(wêX;2 –> (Til;<w,t;1>(h;21,x) &Til;<w,t;1>(h;22,x)))

Anta derfor for vilkårlig w at (9) wêX;2. I lys av Teorem 4.16 har man:

(10.1) X;21 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w) & Re;w'(h;21,x,t;1))

(10.2) X;22 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w) & Re;w'(h;22,x,t;1))

(10.3) X;22 = Mg(w': Hist;(t;1)(w',w) & Re;w'(h;23,x,t;1))

Siden ø≠Max(B,X) Inkl X;21U X;22 Inkl X har man at det er tre muligheter:

Tilfelle (i): Max(B,X) Inkl X;21. Siden X;21 Inkl X har man da at Max(X;21,B)≠ø

& Max(B,X;21) = Max(B,X). Ved hjelp av (5) følger at det fines w;1,w;2 og w;3 slik at:

(11) w;iêMax(B,X;2i) for i=1,..,3. Siden X;2i'ene er disjunkte og samlet uttømmer X;2 har man også at:

(12) w;1B*w;2 & w;1B*w;3

Fra dette, (11), prinsippet P1 samt det at Alt;(x,t;1)(w) = {h;21,h;22,h;23} følger:

Be;<w,x,t;1>(h;21,h;22) & Be;<w,x,t;1>(h;21,h;23). Det følger fra dette at Til;<w,t;1>(h;21,x).

Tilfelle (ii): Max(B,X) Inkl X;22. Dette tilfellet behandles på samme måte som det foregående.

Tilfelle (iii): Man har (13) Max(B,X)Ω X;21≠ø & Max(B,X)Ω X;22≠ø. I lys av (5) må det da finnes w;1,w;2 og w;3 slik at:

(14) w;iêMax(B,X;2i) i = 1,...,3

Men fra (13) og det at X;2i Inkl X (i=1,..,3) følger at:

(15) w;1Bw;2 & w;2Bw;1 & w;1Bw;3

Fra dette, (10.1) – (10.4), (14) og prinsippet P2 kan man slutte:

Mb;<w,x,t;1>(h;21,h;22) & Mb;<w,x,t;1>(h;21,h;23)

Fra dette følger Til;<w,t;1>(h;21,x). På tilsvarende vis kan man utlede:

Mb;<w,x,t;1>(h;22,h;21) & Mb;<w,x,t;1>(h;22,h;23).

Fra dette følger Til;<w,t;1>(h;22,x).

Man ser at vi i alle tilfellene har at Til;<w,t;1>(h;21,x) & Til;<w,t;1>(h;22,x). Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Resultatene ovenfor kan virke trivielle. Men de nevnes her – ikke fordi de er spesielt dype –, men fordi vi ønsker å gi leseren et mer fyldig og grundig bilde av i det minste noen typer av satser som kan utledes i den teorien som har blitt presentert.

Teorem 4.20 Anta C3 og at det følgende holder:

(i) (Aa(aêPt(X) &a≠ø –> Max(B, a)≠ø)

(ii) Be<w;0,x,t;0>(h;1,h;2) & Be<w;0,x,t;0>(h;2,h;3)

(iii) (Aw)(wêX;1 –> (Be<w,x,t;1>(h;11,h;12) & Be<w,x,t;1>(h;12,h;13))

Da gjelder:

w;0êμ(Skal@;(t;0)(b))

der b = μ;-1(Mg(w: Re;w(h;1,x,t;0) & Re;w(h;11,x,t;1)))

Bevis: Anta forutsetningene holder. Det vil være tilstrekkelig å bevise at

(1) ø≠Max(B,H;(t;0,w;0)) Inkl μ(b)

Fra forutsetningen om at enhver ikke-tom delmengde av X inneholder B-maksimale elementer følger det at det finnes w;1,w;2 og w;3 der:

(2.1) w;1êMax(B,X;1)

(2.2) w;2êMax(B,X;2)

(2.3) w;3êMax(B,X;3)

Fra dette, forutsetningene og P1 følger w1B*w;2 & w;2B*w;3. Siden X =X;1UX;2UX;3 og H;(t;0,w;0) = X følger det at

(3) Max(B,X) Inkl Max(B,X;1)

Vi ønsker nå å vise: (4) Max(B,X;1) Inkl Max(B,X;11). Anta derfor for vilkårlig w at (5) wêMax(B,X;1). Da har man wêX;1 og derfor ved hjelp av forutsetning (iii) at

(6) Be;<w,x,t;1>(h;11,h;12) & Be<w,x,t;1>(h;12,h;13)

Nå har man ved hjelp av forutsetning (i) at det finnes w';1,w';2 og w';3 slik at:

(7.1) w';1êMax(B,X;11)

(7.2) w';2êMax(B,X;12)
(7.3) w';3êMax(B,X;13)

Fra (6) og (7.1) – (7.3), Teorem 4.16 og P1 har man w';1B*w';2 & w';2B*w';3. Fra dette, (5) og (7.1)–(7.3) følger, siden X;1= X;11UX;12UX;13 at

Max(B,X;1) Inkl Max(B,X;11). Fra dette og (5) har man så wêMax(B,X;11). Siden w var et vilkårlig objekt følger det at (4) holder.

Nå har man ved hjelp av forutsetnigen C3 at:

X;11 = X;1ΩMg(w: Re;w(h;11,x,t;1)
Inkl Mg(w: Re;w(h;1,x,t;0)) Ω Mg(w: Re;w(h;11,x,t;1))
= Mg(w: Re;w(h;1,x,t;0) ℜw(h;11,x,t;1)) =μ(b)

Fra dette og (4) følger (1) siden vi i lys av forutsetning (iii) i satsen har ø≠Max(B,X).
Q.E.D.

Satsen som vi nettopp har bevist er igjen – noe man kanskje ser – et temmelig vilkårlig eksempel på en type setninger som kan utledes under forutsetningen C3. Andre eksempler på satser av en lignende karakter får man om man endrer preferansene mellom h;1–h;3 og h;11 – h;13 og modifiserer konsekventen i teoremet tilsvarende.

Vi nevner de følgende to satser som er av en lignende natur.

Teorem 4.21 Anta C3 og at det følgende holder:
(i) (Aa(aêPt(X) &a≠ø –> Max(B, a)≠ø)
(ii) Be<w;0,x,t;0>(h;1,h;3) & Be<w;0,x,t;0>(h;3,h;2)
(iii) (Aw)(wêX;1 –> (Be<w,x,t;1>(h;13,h;12) & Be<w,x,t;1>(h;12,h;11))

Da gjelder:
w;0êμ(Skal@;(t;0)(b))
der b = μ;-1(Mg(w: Re;w(h;1,x,t;0) & Re;w(h;13,x,t;1)))

Teorem 4.22 Anta C3 og at det følgende holder:
(i) (Aa(aêPt(X) &a≠ø –> Max(B, a)≠ø)
(ii) Be<w;0,x,t;0>(h;3,h;2) & Be<w;0,x,t;0>(h;2,h;1)
(iii) (Aw)(wêX;3 –> Be<w,x,t;1>(h;32,h;31))

Da gjelder:
w;0êμ(Skal@;(t;0)(b))
der b = μ;-1(Mg(w: Re;w(h;3,x,t;0) & Re;w(h;32,x,t;1)))

Bevisene for Teorem 4.21 og Teorem 4.22 er av samme type som beviset for Teorem 4.20. Av denne grunn kan det neppe ha noen særlig hensikt å gjennomføre dem detaljert her. De overlates til leseren.

Vi nevner den følgende sats fordi den er av en noe annen karakter enn de foregående:

Teorem 4.23 Anta C3 og at det følgende holder:
(i) (Aa(aêPt(X) &a≠ø –> Max(B, a)≠ø)

Da gjelder:
Til;<w;0,t;0>(h;1,x) –> (Aw)(wêX;1 –>
(Til;<w,t;1>(h;11,x) v Til;<w,t;1>(h;12,x)v Til;<w,t;1>(h;13,x)))

Bevis: Vi setter som i tidligere bevis:
f;(w,x,t)(h) = Mg(w': Hist;t(w',w) & Re;w'(h,x,t)).
Fra Teorem 4.16 ser man da at dersom w;1êX;1 har man at følgende holder:

X;1i = f;(w;1,x,t;1)(h;1i). Anta nå at (1) Til;<w;0,t;0>(h;1,x). Det følger fra dette og definisjonen av Til at:

(2) Alt;(w;0)(h;1,x,t;0) &
(Ah')(Alt;(w;0)(h',x,t;0) –> Mb;<w;0,x,t;0>(h;1,h'))

Vi ønsker nå i første omgang å vise at

• (3) X;1ΩMax(B,X)≠ø.

Anta for reduktio ad absurdum at dette ikke er tilfelle. Fra forutsetning (i) følger at Max(B,X)≠ø. Videre har vi fra C3 at X= X;1UX;2UX;3 og de diverse X;i'ene er innbyrdes disjunkte. Det følger derfor om (3) ikke holder at Max(B,X) Inkl X;2UX;3. Det følger da at det er tre muligheter:

Tilfelle (i): Max(B,X) Inkl X;2. Siden X;2 Inkl X har man da:

(4) Max(B,X) = Max(B,X;2). Nå har man at Ma(B,X;1)≠ø og derfor at det finnes noe w;1 slik at:

(5) w;1êMax(B,X;1). Tilsvarende har man i kraft av forutsetning (i) at Max(B,X;2)≠ø og derfor at det finnes w;2 der:

(6) w;2êMa(B,X;2)

Siden vi nå antar at X;1ΩMax(B,X)=ø følger det ved hjelp av (4) og (5) at

w;2B*w;1. Fra dette, (5), (6) og det at følgende holder:

X;1 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;(w;0)(h;1,x,t;0))

X;2 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;(w;0)(h;2,x,t;0))

følger ved hjelp av P1 at Be;<w;0,x,t;0>(h;2,h;1). Men siden Alt;(w;0)(h;2,x,t;0) strider dette mot (2). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (ii): Max(B,X) Inkl X;3. På prinsipielt samme måte som i det foregående tilfelle viser man at også i dette tilfellet kan utlede en motsigelse.

Tilfelle (iii) Max(B,X)ΩX;2≠ø & Max(B,X)ΩX;3≠ø Siden X;2 Inkl X og Max(B,X;2) er ikke-tom kan man slutte at Max(B,X;2) Inkl Max(B,X). Siden Max(B,X;2) og Max(B,X;1) er ikke-tomme i kraft av forutsetning (i) følger det at det må finnes w;1 og w;2 slik at

w;1êMax(B,X;1) & w;2êMax(B,X;2).

Siden Max(B,X;2) Inkl Max(B,X) og vi forutsetter nå at X;1ΩMax(B,X)=ø har man at w;2B*w;1. Fra dette, det at følgende holder:

X;1 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;(w;0)(h;1,x,t;0))

X;2 = Mg(w: Hist;(t;0)(w,w;0) & Re;(w;0)(h;2,x,t;0))

følger ved hjelp av P1 at Be;<w;0,x,t;0>(h;2,h;1). Men siden Alt;(w;0)(h;2,x,t;0) strider dette mot (2). Dette tilfellet er derfor også utelukket.

I alle tilfellene kan man utlede en motsigelse. Dette viser at (3) holder.

Anta nå for vilkårlig w at wêX;1. Nå har man at X;1 = UN/i,1,3/(X;1i) og at de diverse X;1i'ene er innbyrdes disjunkte. Det er da tre muligheter ettersom X1iΩMax(B,X;1)≠ø for i= 1,...,3.

Tilfelle (i): X11Ω Max(B,X;1)≠ø. Da finnes det noe w;1 der man har w;1ê(X11Ω Max(B,X;1)). Fra dette og forutsetning (i) følger det at

(8) Max(B,X;11) Inkl Max(B,X;1) og derfor at

(9) w;1êMax(B,X;11). Vi ønsker nå å vise at (10) Til;<w,t;1)(h;11,x). Anta for reduktio ad absurdum at det motsatte er tilfelle, dvs. anta:

¬(Alt;w(h;11,x,t;1) & (Ah')(Alt;w(h',x,t;1) –> Mb;<w,x,t;1>(h;11,h'))). Siden det

følger fra C3 at Alt;w(h;11,x,t;1) når wêX;1 følger det at det finnes noe h' slik at

(11) Alt;w(h',x,t;1) & Be;<w,x,t;1>(h',h;11)

Vi må da i lys av C3 ha at h'=h;12 eller h'= h;13.

Tilfelle (i1): h'= h;12. Fra dette og (11) følger Be;<w,x,t;1>(h;12,h;11)

Nå har man ved hjelp av Teorem 4.16 at:

(12) X;12 = f;(w,x,t;1)(h) & X;11 = f;(w,x,t;1)(h;2) siden wêX;1.

I lys av forutsetning (i) har vi også at Max(B,X;12)≠ø og at det derfor finnes w;2 slik at

(13) w;2êMax(B,X;12)

Fra dette, (9), (11), (12) og prinsippet P1 kan man slutte:

(14) w;2B*w;1. Men w;1êMax(B,X;1) og w;2êX;12 Inkl X;1. Dette og (14) gir oss en motsigelse.

Tilfelle (i2): h'= h;22. Man viser at en motsigelse lar seg utlede i dette subtilfellet på akkurat samme måte som i det foregående.

I begge undertilfellene har vi vist at en motsigelse kan utledes. Det følger at det ikke kan finnes h' som oppfyller kravet (11). Dette viser at (10) holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii) – (iii): Man har X;1jΩMax(B,X;1)≠ø for j=2,3. Beviset for at henholdsvis Til;<w,t;1)(h;12,x) og Til;<w,t;1)(h;13,x) holder i disse tilfellene gjennomføres på samme måte som i tilfelle (i) under forutsetning av at man foretar passende modifikasjoner. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Vi har nå formulert og bevist de satsene i teorien TML som vi så langt har greid å utarbeide. Det faller derfor naturlig å sette sluttstreken her for den rent formelle utviklingen av teorien. Av satsene ovenfor oppfatter vi Teorem 4.9 – 4.14 som de mest vesentlige fordi de tydelig viser hvilke sammenhenger som består mellom predikatene "Pb;<w,t>(h,x)" og "Til;<w,t>(h,x)" på den ene side og modaloperatorene Skal@;t og Til@;t på den annen side. Teoremene 4.15 – 4.23, som alle inneholder den temmelig sterke forutsetningen C3 ha muligens en mer marginal interesse. Men også disse satsene kan sies å belyse noen sammenhen-ger som består mellom predikatene "Pb;<w,t>(h,x)" og "Til;<w,t>(h,x)" og de modaloperatorene som ble nevnt.

Det virker ikke urimelig å si at de resultatene som det har blitt gjort rede for i denne paragrafen viser en del av utviklingsmulighetene til teorien TML. Men de utgjør langt fra noe som kan kalles en utførlig analyse av teorien. Fra vår fremstilling skulle det imidlertid fremgå hvilken viktig rolle forskjellige preferanserelasjoner og preordninger spiller. I Del II av dette arbeidet studeres preferanserelasjoner fra en mer generell synsvinkel og vi gir i denne delen bevis for en rekke satser som gjelder for dem. Blandt annet kan nevnes fullstendig-hetsresultater for en rekke preferanselogikker. Det er nærliggende å tro at de resultatene vi beviser i denne delen an være av relevans om man ønsker å utvikle TML ytterligere.

Del II

Om ordningsrelasjoner, utvalgsfunksjoner og preferanselogiske systemer

§0 Innledning

Hensikten med denne delen av dette arbeid er å gjøre rede for endel generelle setninger som gjelder om ordningsrelasjoner av forskjellige art og deres sammenheng med visse typer av rent matematiske strukturer som her kalles for utvalgsstrukturer.

Et videre siktepunkt er å studere noe nærmere sammenhengene mellom disse ordningsrelasjoner og utvalgsstrukturer på den ene side og forskjellige systemer for såkalt preferanselogikk og deontisk logikk på den annen side.

For bedre å få tak på innholdet i denne delen synes det best å angi det som er målet for undersøkelsene. Hovedmålet er å belyse så godt som mulig det følgende problem:

La L;m være et vanlig språk for ren setningslogikk utvidet med modaloperatorene "Nec(F)" og "Pos(F)". Disse to konstruksjonene leses henholdsvis: "Det er logisk nødvendig at F" og "Det er logisk mulig at F". Vi tenker oss videre at språket inneholder operatoren "Max(F)". Dette er en setningsdannende konstruksjon på setninger og den kan leses "Det utsagnet er faktisk sant som er sant i nøyaktig de beste av alle de mulige verdenene hvor det er tilfelle at F". I språket L;m inngår ingen andre modaloperatorer. Formlene i L;m dannes på vanlig måte.

Med en modell M for L;m forstår vi et triple <W,R,V> der W er en ikke-tom mengde, R er en preordning over W, dvs. en transitiv og refleksiv relasjon over W og hvor V er en funksjon som tilordner enhver setningsbokstav i L;m en delmengde av W. Er M en modell for L;m brukes uttrykket "(M);1" for å betegne den første komponenten i M. Uttrykkene "(M);2" og "(M);3" betegner henholdsvis den andre og tredje komponenten i M. Vi definerer nå hva om menes med at en formel F er sann i verdenen w i en modell M for L;m, True(F,w,M,L;m) ved den følgende induktive definisjon i det vi antar at M = <W,R,V>:

(i) True(p;k,w,M,L;m) <–> wêV(p:k)
(ii) True(¬F,w,M,L;m) <–> ¬(True(F,w,M,L;m))
(iii) True(F&G ,w,M,L;m) <–>. True(F,w,M,L;m) & True(G,w,M,L;m)
(iv) True(FvG,w,M,L;m) <–>. True(F,w,M,L;m) v True(G,w,M,L;m)
(v) True(F –> G,w,M,L;m) <–> . True(F,w,M,L;m) –> True(G,w,M,L;m)
(vi) True(Nec(F),w,M,L;m) <–> (Aj)(jêW –> True(F,j,M,L;m))
(vii) True(Pos(F),w,M,L;m) <–> (Ej)(jêW & True(F,j,M,L;m))
(viii) True(Max(F),w,M,L;m) <–> wêMax(R, Mg(w: True(F,w,M,L;m))

En formel F i L;m kalles gyldig i en modell M hvis og bare hvis den er sann i alle mulige verdener i M, dvs. hvis og bare hvis man har True(F,w,M,L;m) for alle wê(M);1. En formel i L;m kalles gyldig hvis og bare hvis den er gyldig i enhver modell M for L.

Et av de problemene som ønskes belyst i denne delen av vårt arbeid er da å finne en rekursiv aksiomatisering av mengden av alle de formler i L;m som er gyldige i denne forstand. La oss kalle dette problemet for *aksiomatiserings-problemet for preordninger*. Det må innrømmes med en gang at vi ikke har lykkes i å løse dette problemet. Men vi nevner det likevel fordi det er dette problemet som har lagt føringer på en god del av våre undersøkelser i denne delen.

Innenfor klassen av alle de modeller vi har avgrenset ovenfor kan man studere en mindre omfangsrik klasse. Det dreier seg om de modellene der relasjonen R ikke bare er en transitiv og refleksiv relasjon, men også total i den forstand at at man har (Ax)(Ay)(x,yêW –> (xRy v yRx)). En total preordning som oppfyller dette kravet kalles for en

preferanserelasjon. La oss kalle klassen av disse modellene for klassen av preferanseteoretiske modeller. Det andre problemet som her skal nevnes er derfor problemet som består i å finne en rekursiv aksiomatisering av klassen av de preferanseteoretiske modellene. Dette problemet vil her bli omtalt som *aksiomatiseringsproblemet for preferanse-relasjoner.*

La oss nå gå over til å gi en redegjørelse for innholdet i denne delen av dette arbeidet.

I §1 innfører vi begrepet utvalgsstruktur. En utvalgsstruktur kan sies å være en struktur <X,c> der X er en ikke-tom mengde og c en funksjon som til visse delmengder av X tilordner mengden av de "beste" elementene i disse delmeng-dene. Dette innebærer at dersom a f.eks. er en delmengde av X som er med i domenet til funksjonen c så er c(a) inkludert i a og det er også meningen at de diverse elementene i c(a) i en eller annen forstand skal utgjøre de beste elementene i a. I §1 innfører vi en spesiell type av slike utvalgsstrukturer som der kalles "M-utvalgsstrukturer". Disse strukturene har blitt studert av Hansson i Hansson [2]. De utgjør en blandt flere klasser av utvalgsstrukturer som det kan være naturlig å studere og som faktisk studeres av Hansson. Vi begrenser oss imidlertid her til M-utvalgsstrukturene. I forbindelse med strukturene av denne typen definerer vi presist hva som menes med en preferanserelasjon. Det defineres også presist hva som menes med at en relasjon er en underliggende preferanserelasjon til en M-utvalgsstruktur S. Tilslutt gjør vi rede for to viktige resultater. For det første at man til enhver preferanserelasjon R kan konstruere en M-utvalgsstruktur som har denne preferanserelasjonen R som en under-liggende preferanserelasjon. Dette er et relativt trivielt resultat. Det andre resultatet, som ikke er trivielt, er at man også kan gå den motsatte veien: Gitt en vilkårlig M-utvalgsstruktur S er det mulig å vise at det alltid finnes en preferanserelasjon R som er en underliggende preferanserelasjon til strukturen S. Det bør understrekes at dette bare er ett blandt flere viktige, skarpsindige og ikke-trivielle resultater som bevises i Hansson [2]. Selvfølgelig er det da ikke vårt resultat, men et resultat vi gjør bruk av i den videre fremstilling.

I §2 gjør vi rede for det setningslogiske språket L;m som vi allerede har beskrevet ovenfor. I forbindelse med dette språket, som kan oppfattes som et av de viktigste objektene vi studerer i denne delen av vårt arbeid, defineres en klasse av modeller, nemlig klassen av det vi kaller M-utvalgsstruktur- modellene for L;m. Denne klassen av modeller for L;m betegner vi med "M-ChMod". I sammenheng med denne modellklassen defineres så hva som menes med at en formel i L;m er sann i en mulig verden i en slik modell, hva som menes med at den er gyldig i en slik modell og hva som menes med at den er gyldige i alle slike modeller. Klassen av M-utvalgsmodellene for L;m bestemmer en klasse av formler i L;m, nemlig klassen av alle de formlene som er gyldige i enhver modell av denne typen. I §3 spesifiserer vi helt presist en formallogisk kalkyle M som er ment å aksiomatisere denne mengden med formler. Vi viser at alle teoremene i M er gyldige i alle M-utvalgsstruktur modellene (§3.1) og også at det omvendte holder, mao. at dersom en formel i er gyldig i enhver M-utvalgsstrukturmodell er den også et teorem i M. Beviset for denne sats, som er et standard Henkin-bevis, gis i §3.2.

Utvalgsstrukturmodellene utgjør én type av modeller for L;m. Det er imidlertid også mulig å betrakte en annen type av modeller for dette språket. I §3.3 innfører vi det vi kaller for klassen av de preferanseteoretiske modellene for L;m. I det vesentlige er en preferanseteoretisk modell for L;m en struktur <<X,Q,R>,V> hvor X er en ikke-tom mengde, Q en samling av delmengder av X, R en preferanserelasjon over X og V en funksjon som tilordner setningsbokstavene i L;m delmengder av X. I forbindelse med strukturer av denne typen definerer vi på nytt hva som menes med at en formel i L;m er sann i en verden w i en slik modell. Vi definerer dernest "gyldig i en modell" og "gyldig" på standard måte. Klassen

av de preferanseteoretiske modellene for L;m betegnes med Pref;m. I §3.3.1 viser vi at kalkylen M er komplett med hensyn på denne modellklassen. Dette skjer ved at vi viser hvordan man, gitt en preferanseteoretisk modell kan konstruere en korresponderende M-utvalgsmodell som verifiserer de samme formlene. Dette impliserer at enhver formel som er gyldig i klassen av alle M-utvalgsstruktur modeller også må være gyldig med hensyn på klassen av de preferanseteoretiske modellene i betydningen ovenfor. Ved hjelp av Hanssons teorem er vi også i stand til å bevise det omvendte, nemlig at de to modellklassene bestemmer nøyaktig den samme mengden av gyldige formler i L;m. Siden M var komplett med hensyn på M-ChMod følger det at M også er komplett med hensyn på klassen av de preferanseteoretiske modellene.

Et spesielt trekk ved de sistnevnte modellene er at de inneholder komponenten Q. Det ville ha vært mer naturlig om man hadde kuttet vekk denne komponenten. Med en *ren* preferanseteoretisk modell for L;m forstås et triple <X,R,V> der X er en ikke-tom mengde, R en preferanserelasjon over X og V er en funksjon som tilordner enhver setningsbokstav i L;m en delmengde av X. Sannhet i en mulig verden i en ren preferanseteoretisk modell defineres på forventet måte. Klassen av de rene preferanseteoretiske modellene betegnes med "Pref;0". Man kan nå, og dette vises i §4, avbilde Pref;0 en-entydig på en delmengde A av de preferanseteoretiske modellene, Pref;m, ved en avbildning X som er slik at dersom MêPref;0 så har man at M og X(M) verifiserer nøyaktig de samme formlene. Man kan anskueliggjøre forholdet mellom de modellklassene som så langt er nevnt ved hjelp av figuren på neste side.

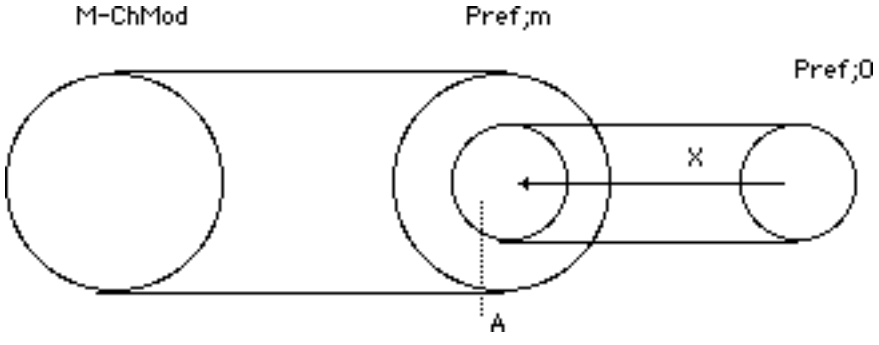
Betegner vi klassen av alle teoremer i systemet M med "Th(M)" og klassen av alle de formler som er gyldige i alle modeller i en bestemt klasse X med "Val(X)" har vi følgelig vist at

Th(M) = Val(M-ChMod) = Val(Pref;m)

Videre har vi også vist at Val(A) = Val(Pref;0). Et viktig spørsmål er derfor om man også har at Val(A) = Val(Pref;m) eller om man har

Val(Pref;m) SInkl Val(A).

Så langt har vi ikke greid å avgjøre dette. Det representerer derfor et av de viktigste uløste problemene i dette arbeidet.



I §4 går vi videre og studerer det setningslogiske systemet, M+, som man får når M utvides med det følgende aksiomskjema:

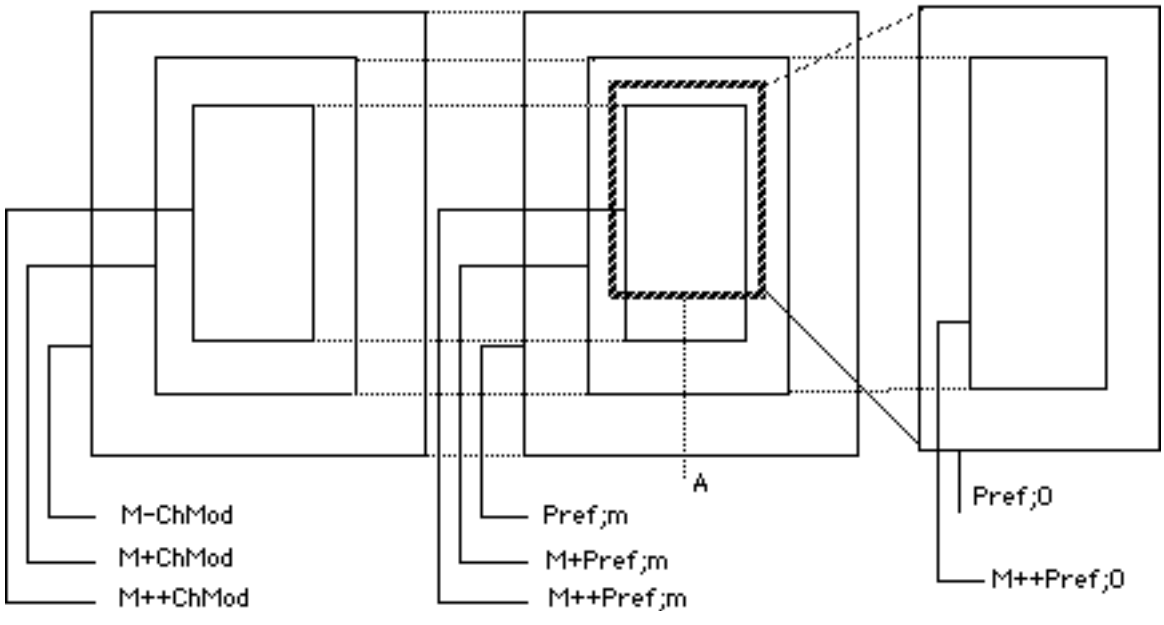
Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) –> Pos(Max(FvG))

Innenfor klassen av de preferanseteoretiske modellene kan man utskille en klasse av modeller som svarer til dette aksiomskjemaet, nemlig de modellene <<X,Q,R>,V> der man har at Q oppfyller kravet (Aa)(Ab)(a,bêQ –> aUbêQ). Denne klassen av modeller betegner vi med "M+Pref;m". Man har naturligvis at M+Pref;m SInkl Pref;m. I §4 avgrenser vi også en tilsvarende klasse av utvalgsstrukturmodeller M+ChMod. Vi viser at de to modellklassene bestemmer den samme klassen av gyldige formler i L;m og at denne klassen er identisk med klassen av teoremer i M+. Et uløst problem er om klassen av de formlene som er gyldige i A er identisk med klassen av de formlene som er gyldige i M+Pref;m. Det ville naturligvis ha hatt en viss interesse om man hadde kunnet avgjøre dette.

I §4.2 betraktes ytterligere en logikk som er sterkere enn M+. Man får dette systemet fra M ved å legge til skjemaet: Pos(F) –> Pos(Max(F)). Den logikken som fremkommer som resultat kalles for M++. I forbindelse med denne logikken viser vi at den er komplett med hensyn på tre forskjellige modellklasser som derfor bestemmer akkurat den samme mengden av gyldige formler i L;m. Vi avgrenser først to underklasser av M+ChMod og M+Pref;m som betegnes med henholdsvis "M++ChMod" og "M++Pref;m". Vi henviser leseren til §4.2 når det gjelder den detaljerte avgrensningen av disse to modellklassene. I forbindelse med dette systemet studerer vi også en delmengde av de rene preferanseteoretiske modellene, Pref;0, som vi viser at M++ er komplett med hensyn på. Denne delmengden av Pref;0 betegnes med "M++Pref;0". Er F en formel i L;m og M en modell i Pref;0 kaller vi mengden av alle de verdenene i M hvor F er sann for sannhetsmengden til F med hensyn på M. M++Pref;0 er nå klassen av alle de rene preferanseteoretiske modellene M = <X,R,V> der man har at hvis en formel F har en ikke-tom sannhetsmengde med hensyn på M så inneholder denne sannhetsmengden R-maksimale elementer.

Inklusjonsforholdene mellom de modellklassene vi så langt har nevnt kan illustreres ved hjelp av den følgende figur:

FIGUR



Vi har så langt gjort rede for trekk ved innholdet i §1 – §4 i denne andre delen av det foreliggende arbeid. La oss nå gi en oversikt over innholdet i de resterende paragrafer.

I §5 utvider vi språket L;m med to binære setningsdannende operatorer på setninger. Disse betegnes med henholdsvis "Pr" og "Ekv". En setning av typen "Pr(F,G)" kan leses

"De beste verdenene der det er tilfelle at F er bedre enn de beste verdenene der det er tilfelle at G". En setning av typen "Ekv(F,G)" kan leses "De beste verdenene der det er tilfelle at F er like bra som de beste verdenene der det er tilfelle at G". Man kan nå utvide systemet M++ ved (i) å utvide språket med de to konnektivene ovenfor og (ii) ved å legge til to nye aksiomskjemaer A6 og A7 for disse to nye konnektivene. Det nye systemet kalles M++;u. Aksiomskjemaene A6 og A7 spesifiseres i §5. Det utvidete språket betegnes med "L;p". Hovedinnholdet i §5 kan da sies å bestå i at vi gir et fullstendighetsbevis for kalkylen M++;u med hensyn på to modellklasser som defineres presist.

I §5.2 ser vi på en kalkyle, P0-Det som har blitt undersøkt i Rognes [8], "Studier i semantikk og erkjennelsesteori II", Kp I, Del B,C. Språket til P0-Det er det man får når man sløyfer operatoren Max fra L;p. Paragrafen inneholder et semantisk bevis for at alle teoremene i P0-Det lar seg utlede i M++;u.

I den neste neste paragrafen, §6, studeres preordninger. Vi gir først en ny definisjon av begrepet M-utvalgsstruktur som er ekvivalent med den som blir gitt i §1. Hovedresultatet i denne paragrafen er beviset for et teorem som sier at til enhver M-utvalgsstruktur finnes en underliggende preordning. Vi viser også det omvendte, at dersom R er en preordning over et område X er det mulig å definere på en naturlig måte en M-utvalgsstruktur hvor R er en underliggende preordning. Det første av disse resultatene følger fra det teoremet til Hansson som ble nevnt i §1. Resultatet i denne paragrafen er svakere og vi har tatt med beviset fordi dette beviset ikke forekommer i Hansson [1], [2] og fordi det har en litt annen struktur enn det beviset som gis der.

I §6.1 definerer vi en klasse med modeller for L;m, klassen av preordningsmodeller for L;m og stiller aksiomatiseringsproblemet for mengden av alle de formler i L;m som er gyldige i alle slike modeller. Som vi nevnte tidligere har vi ikke greid å løse dette problemet. Man kan imidlertid vise at alle teoremene i systemet M er gyldige med hensyn på mengden av preordningsmodeller.

I §6.2 undersøkes ytterligere krav som kan stilles til M-utvalgsstrukturene. Vi betrakter i alt seks slike krav. Er R en preordning over X, setter man V lik mengden av alle de delmengder av X som inneholder R-maksimale elementer og lar man f være funksjonen som til hver aêV tilordner denne mengden mengden av de R-maksimale elementene i a, kan man vise at M-utvalgsstrukturen <X,V,f> oppfyller disse seks kravene. Korresponderende til disse seks krav betrakter vi også seks formler i L;m som betegnes C4 – C9. Hver av disse formlene er gyldige i den klassen av M-utvalgsmodeller for L;m hvor alle modellene oppfyller det korresponderende krav. §7 inneholder en rekke syntaktiske derivasjoner av teoremer i de kalkylene som har blitt introdusert. Vi viser blandt annet at C4 – C9 kan utledes i systemet M++. I denne paragrafen spesifiserer vi også vise nye formler C4˚ og C10 og viser diverse satser om systemer som er ekvivalente når M utvides med en eller flere av formlene C4˚ og C4 – C10. §8 inneholder en rekke teoremer som belyser sammenhengen mellom operatoren Max og operatorene Pr, Ekv og Pr*. De fleste av de satsene som bevises kan utledes i systemet M utvidet med C9 og C10 som nye aksiomskjemaer. Endelig gir vi §9 en rent syntaktisk deduksjon av systemet
P0-Det fra systemet M++;u. Dette innebærer at vi viser rent syntaktisk at ethvert teorem i P0-Det er et teorem i M++;u. I §5.2 ga vi, som man husker, et semantisk bevis for den samme påstand.

I §10 innfører vi en ny type av utvalgsstrukturer. Disse kalles for "P-strukturer". Vi viser at gitt en vilkårlig preordning R over et domene X kan vi på en naturlig måte konstruere en P-struktur S hvor denne preordningen R er en underliggende preordning. I tillegg til dette viser vi at dersom man tar sitt utgangspunkt i en vilkårlig P-struktur S, finnes det alltid en preordning R som er en underliggende preordning i S. Motivet for å undersøke P-strukturer

er dette: Gitt den kanoniske modellen som konstrueres i fullstendighetsbeviset for M er det mulig at man med utgangspunkt i denne kan definere en P-struktur om man tenker seg M utvidet med f.eks. C4 – C9 eller relaterte aksiomer til et system M*. Den underliggende preordning i denne P-strukturen kan så kanskje brukes i en definisjon av en preordningsmodell som verifiserer alle formlene i den konsistente M*-teorien som danner utgangspunktet for konstruksjonen av den kanoniske modellen. Hvis dette lar seg gjøre synes det som om man kommer et vesentlig skritt nærmere en løsning på aksiomatiseringsproblemet for klassen av preordnigsmodeller. Det må innrømmes at vi ikke har lykkes med denne strategi. Imidlertid har vi heller ikke greid å vise at intet fremstøt i denne retning er dømt til å mislykkes.

Vi har nå gitt en oversikt over innholdet i Del II. La oss så gå over til detaljene.

§1 M-utvalgsstrukturer og preferanserelasjoner.

Vi definerer en M-utvalgsstruktur S, i symboler "M-Ch(S)" ved:

Definisjon 1.1 M-Ch(S) holder hvis og bare hvis S=<X,Q,c> der X, Q og c er entiteter som oppfyller de følgende krav:

(i) Q Inkl Pt(X) & X≠ø
(ii) Func(c) & Dom(c) =Q &Rgn (c) Inkl Q
(iii) (Aa)(aêQ –> c(a) Inkl a)
(iv) (Aa)(aêQ –> c(a)≠ø)
(v) For alle a;1,....,a;nêQ (n≥2) gjelder at dersom a;nΩc(a;1)≠ø og Konj/k,1,n-1/(a;kΩc(a;k+1)≠ø) så har man:
SN/k,1,n–1/(c(a;k)Ωa;k+1 = a;kΩc(a;k+1))
(vi) Un(Q) Inkl X.

Vi definerer hva som menes med at R er en preferanserelasjon over X, i symboler "Pref(R,X)" ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.2 (a) Pref(R,X) <–> Rel(R) & Dom(R) =X &
(Ax)(Ay)(Aw)(x,y,zêX –> (xRy &yRz –> xRz)) &
(Ax)(Ay)(x,yêX –> xRy v yRx)
(b) xR;* y <–> (xRy & ¬(yRx))
(c) x ≈:R y <–> (xRy & yRx)

La S være en M-utvalgsstruktur. Da kan man definere hva som menes med at R er en underliggende preferanserelasjon for S, i symboler, "B(S,R)", på den følgende måte:

Definisjon 1.3 B(S,R) <–> [M-Ch(S) & Pref(R, (S);1) &
(Aa)(aê(S);2 –> (Ax)(xê(S);3(a) <–> (Ay)(yêa <–> xRy)))]

Hansson har i Hansson [2] bevist det følgende teorem som kan formuleres helt presist på den følgende måte:

Teorem 1.1 (a) M-Ch(S) –> (ER)(B(S,R))
(b) Pref(R,X) & X≠ø –> (ES)(M-Ch(S) & (S);1 = X & B(S,R))

Det første punktet i dette teoremet uttrykker den påstand at dersom S er en M-utvalgsstruktur så finnes det en underliggende preferanserelasjon R til S. Det andre punktet i teoremet uttrykker at dersom R er en preferanserelasjon over det ikke-tomme området X så finnes det en M-utvalgsstruktur S hvor den første komponenten i S er domenet S og hvor R er en underliggende preferanserelasjon for S.

Ved siden av det som her kalles for M-utvalgsstrukturer betrakter Hansson også en rekke andre typer av utvalgsstrukturer. Men i denne sammenheng er den type av strukturer som er definert ved Definisjon 1 av størst interesse.

Vi definerer Max(R,a) ved:

Max(R,a) = Mg(y: yêa & (Ax)(xêa –> yRx))

Max(R,a) er følgelig de R-maksimale elementene i mengden a. Gitt dette begrepet kan man formulere en sats som er litt sterkere enn punkt (b) i Teorem 4. Det dreier seg om den følgende påstand:

Teorem 1.2 Anta Pref(R,X) & X≠ø. Anta videre at:
Q= Mg(a: a Inkl X & Max(R,a)≠ø) & c= Mg(<a,Max(R,a)>: aêQ)
Da gjelder: M-Ch(<X,Q,c>)

Bevisene for Teorem 4 og Teorem 5 er gitt i Hansson [2] og leseren kan derfor studere dem der.

§2 Det setningslogiske språket L;m og modeller for dette.

I denne paragrafen skal vi betrakte et bestemt setningslogisk språk som vil bli betegnet med "L;m". L;m er språket for vanlig setningslogikk utvidet med tre nye setningsdannende konstruksjoner på setninger, nemlig "Nec", "Pos" og "Max". Mer formelt kan man si at språket består av følgende komponenter:
(i) En tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver, p1,.....,pn,..... (ii) De setningslogiske konnektivene ¬, &, v, –> og <–>. Disse skal ha sin vanlige betydning. (iii) Konstruksjonene "Nec", "Pos" og "Max". "Nec" står for logisk nødvendig, "Pos" for logisk mulighet og setninger av typen "Max(F)" er det meningen at skal leses "Det er slik som det utsagnet som er sant i nøyaktig de beste av alle de mulige verdener hvor det er slik at F sier at det er". Begrunnelsen for denne lesemåten av konstruksjonen F vil fremgå etterhvert.
(iv). De velformede formlene i L;m er den minste mengden av uttrykk som oppfyller de følgende krav: (a) Enhver setningsbokstav er en velformet formel i L;m. (b) Er F og G to velformede formler i L;m er F&G, FvG, F–>G og F<–>G det også. (c) Er F en velformet formel i L;m er også Nec(F), Pos(F) og Max(F) velformede formler i L;m.

§2.1 Modeller for språket L;m

Vi betegner klassen av alle setningsbokstavene i språket L;m med "Var(L;m)"

Med en modell M for L;m forstås en struktur M= <<X,Q,c>,V> der komponentene oppfyller de følgende krav. (i) <X,Q, c> er en M-utvalgsstruktur. (ii) V er en funksjon som tilordner

setningsbokstavene i L;m delmengder av X, med andre ord kreves det at V: Var(L;m) –> Pt(X).

Klassen av formler i L;m betegner vi med Fm(L;m). Anta nå at F er en formel i L;m, det vil si at FêFm(L;m) og at M=<<X,Q,c>,V> er en modell for L;m. Da defineres uttrykket "True(F,L;m,w,M)" som leses "F er en formel i L;m som er sann i verdenen w i modellen M" ved den følgende induktive definisjon hvor det forutsettes at wêX og at F,G er formler i L;m:

(1) True(pk,L;m,w,M) <–> wêV(pk)
(2) True(F&G, L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) & True(G,L;m,w,M))
(3) True(FvG,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) v True(G,L;m,w,M))
(4) True(F–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) –> True(G,L;m,w,M))
(5) True(F<–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) <–> True(G,L;m,w,M))
(6) True(¬F,L;m,w,M) <–> (¬True(F,L;m,w,M))
(7) True(Nec(F), L;m,w,M) <–> (Aj)(jêX –> True(F,L;m,j,M))
(8) True(Pos(F), L;m,w,M) <–> (Ej)(jêX & True(F,L;m,j,M))
(9) True(Max(F), L;m,w,M) <–> [Mg(w: True(F,L;m,w,M))êQ & wêc(Mg(w: True(F,L;m,w,M)))]

Er M en modell for L;m og er M=<<X,Q,c>,V> kalles X for domenet i modellen M. Vi betegner dette med "Dom(M)". En formel i L;m kalles gyldig, i symboler "Val(F)", hvis og bare hvis man har at True(F,L;m,w,M) for alle modeller M for L,m og alle w der wêDom(M).

§3 Det logiske systemet M.

Innenfor rammen av L;m skal vi nå definere et bestemt logisk system som vil bli kalt for M. Aksiomene i dette systemet er de følgende: (a) Et vanlig aksiomsystem for setningslogikk. Man kan f.eks. benytte de følgende skjemaer:

(SL1) (¬G –> ¬F) –> (F –> G)
(SL2) (F–>(G –>H)) –> ((F–>G) –> (F–> H))
(SL3) F–>(G–>F)

(b) Et vanlig sett av aksiomskjemaer for det setningslogiske systemet S5 når det gjelder konnektivene "Nec" og "Pos":

(ML1) Nec(F) –>F
(ML2) Nec(F –> G) –> (Nec(F) –> Nec(G))
(ML3) Nec(F) –> Nec(Nec(F))
(ML4) ¬Nec(¬F) –> Nec(¬Nec(¬F))
(ML5) Pos(F) <–> Nec(F)

De følgende aksiomer for operatoren Max:

(A1) Nec(F <–> G) –> (Max(F) <–> Max(G))
(A2) Nec(Max(F) –> F) & (Pos(Max(F)) –> Pos(Max(Max(F))))
(A3) Konj/1≤k≤(n-1)/(Pos(F;k& Max(F;(k+1)))) & Pos(F;n &Max(F;1) –>. Konj/1≤k≤(n-1)/(Nec(Max(F;k)& F;(k+1)

<–> F;k& Max(F;(k+1))))

Dette avslutter oversikten over aksiomene i systemet M. Når det gjelder slutningsregler i systemet er det kun to av disse: (i) Modus ponens, dvs. regelen som sier at dersom F er et teorem og F–>G er det så er også G et teorem. (ii) Regelen om modal generalisering. Denne sier at dersom F er et teorem så er også Nec(F) et teorem.

De vanlige syntaktiske begreper innføres på forventet måte. I det følgende vil uttrykket "Th;S(F)" bety at formelen F er et teorem i systemet S. I noen tilfelle hvor F er en meget lang formel vil vi sløyfe parantesene rundt "F" og i stedet skrive: "Th;S F".

§3.1 Gyldighetsteoremet for logikken M.

Det er nokså lett vise at alle teoremene i logikken M er gyldige, dvs. at de kommer ut som sanne i enhver verden i enhver modell for L;m. Dette innebærer altså at man har:

Teorem 3.1.1 (AF)(FêFm(L;m) –>(Th;M(F) –> Val(F))

Siden det er meget lett å bevise for de fleste aksiomenes vedkommende at de er gyldige skal vi ikke gjøre dette i detalj. Oppgaven overlates til leseren som en øvelse. Det skulle heller ikke være noen vanskeligheter med å vise at slutningsreglene i systemet er gyldige. Når det gjelder denne satsen skal vi derfor bare gi et bevis for at formelen A3 er gyldig. Anta M= <<X,Q,c>,V> er en modell for L;m og at wêX. Anta

Konj/1≤k≤(n-1)/(Pos(F;k& Max(F;(k+1)))) & Pos(F;n &Max(F;1)

er sann i verdenen w i modellen M. Da følger om 1≤k≤(n-1) at:

(1) True(F;k& Max(F;(k+1)),L;m,j,M) for noe jêX og

(2) True(F;n& Max(F;1),L;m,k,M) for noe kêX

I lys av definisjonen av "True(F,L;m,w,M)" følger da fra (1) og (2) at:

(3) Mg(w: True(F;k,L;m,w,M))Ω c(Mg(w: True(F;k+1,L;m,w,M))) ≠ø

om 1≤k≤(n-1). Dessuten følger:

(4) Mg(w: True(F;n,L;m,w,M))Ω c(Mg(w: True(F;1,L;m,w,M))) ≠ø

I tillegg følger fra (1) og (2) at:

(5) Mg(w: True(F;s,L;m,w,M))êQ for sê{1,....,n}.

Fra det forhold at <X,Q,c> er en M-utvalgsstruktur følger i lys av (3) –(5) at:

c(Mg(w:True(F;k,L;m,w,M)))Ω Mg(w:True(F;k+1,L;m,w,M))=

c(Mg(w:True(F;k+1,L;m,w,M)))Ω Mg(w:True(F;k,L;m,w,M)) for

kê{1,...,n-1}. Fra dette følger i sin tur om kê{1,...,n-1}

(Aw)(wêX–>.

wêc(Mg(w:True(F;k,L;m,w,M)))&True(F;k+1,L;m,w,M)) <–>

wêc(Mg(w:True(F;k+1,L;m,w,M)))& True(F;k,L;m,w,M)

Dette sammen med (5) gir en at

Konj/1≤k≤(n-1)/(Nec(Max(F;k)& F;(k+1)<–> F;k& Max(F;(k+1))))

er sann i verdenen w i modellen M. QED.

Man bør legge merke til parallelliteten mellom aksiomet A3 og kravet (v) i definisjonen av M-utvalgsstruktur.

§3.2 Fullstendighetsproblemet for logikken M

Det er også mulig å løse fullstendighetsproblemet for logikken M ved hjelp av vanlige metoder innenfor modallogikken. I dette avsnittet skal vi gjøre dette.

I det følgende antar vi at S er en eller annen logikk i språket L;m. Man kan f.eks. tenke seg at S er det systemet som fremkommer fra M ved å fjerne aksiomene A1 –A3 slik at man bare sitter igjen med den modallogiske og setningslogiske del av systemet. Vi skal forutsette at modus ponens og modal generalisering er slutningsregler i systemet S.

For å gjennomføre fullstendighetsbeviset er det nødvendig å innføre en rekke begrepsdannelser og gi bevis for en rekke hjelpesetninger. La oss på dette punkt gjøre oppmerksom på at det meste av det vi skal gjøre rede for her er standard- teknikker som overhodet ikke representerer noe nytt.

Anta F er en formel i L;m. Da kalles F for S-konsistent, der S er en logikk i L;m, hvis og bare hvis man har at ¬Th;S(¬F), med andre ord om det ikke er slik at negasjonen av F er et teorem i systemet S. Er Δ en mengde med formler i språket L;m sies Δ å være S-konsistent hvis og bare hvis det ikke finnes noen endelig rekke med formler F;1,....,F;kêΔ (k≥1) som er slik at Th;S(¬(F;1&...&F;k)). En mengde med formler Δ i L;m kalles for maksimalt S-konsistent hvis og bare hvis den er S-konsistent og det dessuten ikke finnes noen mer omfattende mengde av formler i L;m, la oss si Δ' som er S-konsistent og som strengt inkluderer Δ.

Det følgende teorem er helt sentralt i det følgende.

Teorem 3.2.1 (Lindenbaums lemma) Enhver S-konsistent mengde av formler Δ kan utvides til en maksimalt konsistent mengde med formler, dvs. Er Δ en S-konsistent mengde med formler i L;m finnes en maksimalt S-konsistent mengde Δ' med formler i L der man har Δ Inkl Δ'.

Bevis: Anta Δ er en S-konsistent mengde med formler i L;m. Anta F;0, F;1,....,F;n,.... er en enummerering av alle formlene i L;m. (Vi antar at L;m er et tellbart språk.) Definer nå induktivt en formelmengde Δ;k for kêNat på den følgende måte:

(i) Δ;0 = Δ

(ii) Δ;(k+1) = Δ;k om F;k er S-inkonsistent med Δ;k, dvs. om Δ;kU{F;k} er S-inkonsistent. Ellers er Δ;(k+1) = Δ;kU{F;k}

Vi setter Δ;∞ = UN/n,0,∞/(Δ;k). Man kan nå vise at (a) Δ Inkl Δ;∞. Dessuten kan man vise (b) at Δ;∞ er maksimalt S-konsistent. La oss først se på (a). Man har fra (i) at Δ Inkl Δ;0. Anta Δ Inkl Δ;k. Det er to muligheter når det gjelder Δ;(k+1). Enten har man at Δ;(k+1)=Δ;k. I så fall følger Δ Inkl Δ;(k+1). Eller så er Δ;(k+1) = Δ;kU{F;k}. Men også i dette tilfellet er Δ inkl Δ;(k+1). Fra dette følger ved induksjon at man har: (An)(nêNat –> Δ Inkl Δ;n). At Δ Inkl Δ;∞ innebærer per definisjon at (Ax)(xêΔ –> (En)(nêNat &n≥0 & xêΔ;n)). Dette følger imidlertid umiddelbart fra det vi nå nettopp har bevist.

La oss så se på (b). Fra definisjonen av Δ;k fremgår det umiddelbart at Δ;0 er konsistent. Dette er fordi Δ;0=Δ og Δ etter forutsetning er konsistent. Anta Δ;k er konsistent for vilkårlig k. Da ser man fra definisjonen at også Δ;(k+1) er konsistent. Anta nå for reduktio ad absurdum at Δ;∞ er S-inkonsistent. Da finnes det G;1,...,G;r êΔ;∞ slik at Th;S(¬(G;1&...&G;r)). La j være det minste naturlige tallet slik at {G;1,....,G;r} Inkl {F;0,....,F;j}. Da har vi at {G;1,...,G;r} Inkl Δ;j og derfor at Δ;j er inkonsistent. Men dette er umulig. Det følger at Δ;∞ er konsistent. Vi må imidlertid også vise at Δ;∞ er maksimalt konsistent. Anta for reduktio at Δ;∞ SInk H der H er en formelmengde i L;m og hvor H er konsistent. Da må det finnes en formel F slik at (1) FêH & ¬(FêΔ;∞). Siden F er en formel I L;m har man at F= F;k for noe k. Ved konstruksjonen av Δ;∞ må derfor F ha blitt puttet

inn i Δ;(k+1) Inkl Δ;∞. Men da må FêΔ;∞. Dette strider klart mot (1). Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

S-maksimalt konsistente mengder har visse viktige egenskaper. Endel av disse er sammenfattet i det følgende teorem:

Teorem 3.2.2 Er Δ en S-maksimalt konsistent mengde av formler i L;m har man at følgende gjelder om F,G er formler i L;m:

(i) FêΔ v (¬F)êΔ
(ii) Th;S(F) –> FêΔ
(iii) FêΔ & (F–>G)êΔ –> GêΔ
(iv) ¬(EG)(GêFm(L;m) & GêΔ & (¬G)êΔ)

Bevis: (i) Anta for reduktio ad absurdum at ¬(FêΔ) og ¬((¬F)êΔ). Siden Δ er maksimal må da ΔU{F} og ΔU{¬F} være inkonsistente. Dette innebærer at det finnes formler d1,....,dnêΔ slik at (1) Th;S(¬(d1&....&dn&F)). Videre må det finnes visse formler e1,...,emêΔ slik at (2) Th;S(¬(e1&...&em&¬F)). Fra (1) og (2) følger imidlertid:

(3) Th;S: d1&...&dn –> ¬F
(4) Th;S: e1&...&em –>F

Fra disse to ting følger så Th;S(¬(d1&...&dn&e1&...&em)). Men dette innebærer at Δ er S-inkonsistent, noe som er umulig.

(ii) Anta for reduktio ad absurdum at Th;S(F) og ¬(FêΔ). Det siste og det vi viste under punkt (i) impliserer at (¬F)êΔ. Men dette og Th;S(F) innebærer at Δ er S-inkonsistent. Dette er umulig.

(iii) Anta for reduktio ad absurdum at F,G er formler i L;m der man har FêΔ & (F–>G)êΔ & ¬(GêΔ). Den siste konjunkten impliserer i lys av resultatet under (i) at (¬G)êΔ. Det følger at vi har {F,F–>G, ¬G} Inkl Δ. Men nå har man Th;S(¬(F&F–>G &¬G)). Dette har som konsekvens at Δ er inkonsistent ,noe som er umulig.

(iv) Anta GêΔ & (¬G)êΔ for en eller annen formel G. Siden Th;S(¬(G&¬G)). Følger da at Δ er inkonsistent. Som i de andre tilfellene ser man at dette er helt umulig siden Δ etter forutsetningen skal være maksimalt konsistent.

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Vi skal i det følgende forutsette at S er logikken M eller en utvidelse av denne med nye aksiomskjemaer. Dette innebærer at S nå inneholder alle aksiomskjemaene for S5 i L;m, dvs. skjemaene ML1 – ML5 ovenfor. Vi lar W' betegne klassen av alle S-maksimalt konsistente mengder i L;m. Vi definerer så en relasjon R over W' ved å sette:

R = Mg(<w;1,w;2>: w;1,w;2êW' & (AF)(FêFm(L;m &Nec(F)êw;1 –> Fêw;2))

La oss bevise:

Teorem 3.2.3 Anta R og W' er definert som angitt ovenfor. Da gjelder ar R er en ekvivalensrelasjon over W'

Bevis: Anta w er et vilkårlig element i W'. Vi ønsker å vise at wRw. I lys av definisjonen av R er det da tilstrekkelig å bevise at Fêw så sant Nec(F)êw for alle formler F i L;m. Nå har man at Th;S(Nec(F) –> F) siden ML1 inngår som aksiom i S. Fra dette og det forrige teoremet kan man da slutte at (Nec(F) –> F)êw. Men er da Nec(F)êw kan vi fra Teorem 3.2.2

slutte at også Fêw. Dette viser at F er refleksiv. Det er nødvendig å vise at R er transitiv. Anta derfor at w;1Rw;2 og at w;2Rw;3. I lys av definisjonen av R innebærer dette at:

(1) (AF)(FêFm(L;m &Nec(F)êw;1 –> Fêw;2) og

(2) (AF)(FêFm(L;m &Nec(F)êw;2 –> Fêw;3)

Anta nå F er en vilkårlig formel i L;m der vi har (3) Nec(F)êw;1. Nå har vi Th;S(Nec(F) –> Nec(Nec(F))). Dette innebærer i lys av Teorem 3.2.2 at
(Nec(F) –> Nec(Nec(F)))êw;1. Sammen med (3) impliserer dette at Nec(Nec(F))êw;1. Dette og (1) impliserer Nec(F)êw;2. I sin tur impliserer dette sammen med (2) at Fêw;3. Vi har derfor vist:

(AF)(FêFm(L;m &Nec(F)êw;1 –> Fêw;3) I lys av definisjonen av R må vi da ha w;1Rw;3.

Det er også nødvendig å vise at R er symmetrisk. Anta derfor w;1Rw;2. I følge definisjonen av R innebærer dette:

(4) (AF)(FêFm(L;m &Nec(F)êw;1 –> Fêw;2) Nå har vi at

¬Nec(F) –> Nec(¬Nec(F)) er et teorem i S. Anta for reduktio ad absurdum at (5) Nec(F)êw;2 og at ¬(Fêw;1) for en eller annen formel F i L;m. Fra det siste og foregående teorem følger at (6) (¬F)êw;1. Siden ¬F –> ¬Nec(F) er et teorem i S har man at (¬F –> ¬Nec(F))êw;1. Dette og (6) innebærer at (¬Nec(F))êw;1. Men siden ¬Nec(F) –> Nec(¬Nec(F)) er et teorem i S har vi
Nec(¬Nec(F))êw;1. Dette og (4) impliserer (¬Nec(F))êw;2. Men dette strider åpenbart mot (5). Dette viser at R også er symmetrisk. **Q.E.D.**

Teorem 3.2.4 Anta R og W' er definert som angitt ovenfor. Anta F,G er vilkårlige formler i L;m og at wêW'. Da gjelder de følgende påstander:

(i) Fêw &Gêw <–> (F&G)êw

(ii) (¬F)êw <–> ¬(Fêw)

(iii) (F–>G)êw <–> (Fêw –> Gêw)

(iv) (F<–>G)êw <–> (Fêw <–> Gêw)

(v) (F v G)êw <–> (Fêw v Gêw)

(vi) Nec(F)êw <–> (Aw')(w'êW' & wRw' –> Fêw')

(vii) Pos(F)êw <–> (Ew')(wRw' & fêw')

Bevis: De fem første punktene i dette teoremet kan lett bevises ved hjelp av Teorem 3.2.2. Vi tar bare for oss (i) som et eksempel og overlater (ii) – (v) til leseren. Anta Fêw & Gêw. Nå har man Th;S(F –>G–>(F&G)). Dette er jo et enkelt teorem i setningslogikken. Fra dette følger ved hjelp av Teorem 3.2.2 (iii) at (G –> F&G)êw i lys av at Fêw. Siden G og så er et element i w følger (F&G)êw.

La oss så se på (vi). Anta (1) Nec(F)êw & (2) wRw' for vilkårlig w'. Fra (2) og definisjonen av R følger (AG)(Nec(G)êw –> Gêw'). Fra dette og (1) har man åpenbart at Fêw'.

Anta på den annen side at (3) (Aw')(w'êW' &wRw' –> Fêw'). Anta for reduktio ad absurdum at (4) ¬(Nec(F)êw). Siden w er en S-maksimalt konsistent mengde følger da (¬Nec(F))êw. Men siden Th;S(¬Nec(F) –>Pos(¬F)) kan vi videre slutte at (5) Pos(¬F)êw i lys av egenskapene til maksimalt konsistente utsagn. Definer nå en formelmengde Q ved å sette:

(6) Q = {¬F} U Mg(G: Nec(G)êw)

Anta for reduktio ad absurdum at Q er S-inkonsistent. Da vil det finnes H;0,...,H;nêFm(L;m) slik at (7) Th;S(¬(H;0&.....&H;n)). Vi kan anta at (¬F)=H;0 for er alle H'ene med i Mg(G: Nec(G)êw) følger fra (7) at

(8) Th;S(¬((¬F)& H;0&....& H;n)). Vi har derfor at

(9) Th;S(H;1&.....&H;n –> ¬(¬F)) Dette er ekvivalent med:

(10) Th;S(H;1&....&H;n –> F) Fra dette, aksiomene og slutningsreglene i S utleder man lett:

(11) Th;S(Nec(H;1)&...&Nec(H;n) –> Nec(F)). Fra det faktum at H;1,...H;nêMg(G: Nec(G)êw) følger at

(12) Nec(H;1)êw &....& Nec(H;n)êw. Dette og (11) impliserer Nec(F)êw som åpenbart strider mot (4). Det følger at Q er konsistent. Ved hjelp av Lindenbaums lemma kan da Q utvides til en S-maksimalt konsistent mengde w'. Det er da klart at at man har (13) (¬F)êw' og at (AF)(FêFm(L;m)&Nec(F)êw–>Fêw'). Dette innebærer at wRw'. Men fra dette og (3) følger Fêw' som åpenbart strider mot (13). Dette viser at det er umulig å anta både (3) og (4). Man kan derfor konkludere med at (vi) holder.

La oss også se på (vii). Anta (14) Pos(F)êw. Siden Th;S(Pos(F) <–> ¬Nec(¬F)) har man at (14) holder hvis og bare hvis (¬Nec(¬F))êw. Dette er ekvivalent med at ¬(Nec(¬)êw). I lys av (v) er dette i sin tur ekvivalent med:

¬(Aw')(wRw'& w'êW' –> (¬F)êw'). Ved hjelp av Teorem 3.2.2 ser man at dette sier det samme som (Ew')(w'êW' & wRw' & Fêw'). Dette viser at (vi) holder. **Q.E.D.**

Vi har latt "W'" betegne klassen av absolutt alle S-maksimalt konsistente mengder i L;m. Fra Teorem 3.2.3 fremgår det at R er en ekvivalensrelasjon over denne mengden. Dette innebærer at R inndeler W' i en familie av ikke-tomme, innbyrdes elementfremmede mengder som samlet uttømmer W'. La nå Δ være en vilkårlig S-konsistent mengde. Denne kan da, som man har sett, utvides til en maksimalt konsistent mengde Δ'. Siden Δ' er maksimalt konsistent vil Δ' være med i W' og dermed en av R-ekvivalens klassene i W'. La oss betegne denne R-ekvivalensklassen med "W;0". Når det gjelder W;0 vil derfor følgende sats gjelde:

Teorem 3.2.5 Anta W;0 er definert som angitt ovenfor. Anta F,G er vilkårlige formler i L;m og at wêW;0. Da gjelder de følgende påstander:

(i) Fêw &Gêw <–> (F&G)êw
(ii) (¬F)êw <–> ¬(Fêw)
(iii) (F–>G)êw <–> (Fêw –> Gêw)
(iv) (F<–>G)êw <–> (Fêw <–> Gêw)
(v) (F v G)êw <–> (Fêw v Gêw)
(vi) Nec(F)êw <–> (Aw')(w'êW;0 –> Fêw')
(vii) Pos(F)êw <–> (Ew')(w'êW;0 & fêw')

Bevis: Påstanden følger umiddelbart fra definisjonen av W;0 og Teorem 3.2.4. **Q.E.D.**

Vi ønsker nå med utgangspunkt i W;0 å konstruere en modell

M' = <<X;0,Q;0,c;0>,V;0> for L;m som er slik at for enhver wêX;0 så har man om F er en hvilken som helst formel i Δ at True(F,L;m,w,M'). Vi konstruerer denne modellen slik:

Vi setter X;0 = W;0. Vi definerer Sm ved å sette:

Sm(F) = Mg(w: wêX;0&Fêw)

Man ser at Sm derfor er en funksjon som til enhver formel F i L;m tilordner formelen klassen av alle de maksimalt konsistente mengdene i X;0 hvor formelen selv er med. Vi kaller Sm(F) for sannhetsmengden til formelen F. Vi definerer en mengde C;0 ved å sette:

C;0 = Mg(Sm(F) : FêFm(L;m)). Funksjonen c;0 defineres så på den følgende måte:

c;0 = Mg(<a,b>: (EF)(FêFm(L,m)& a=Sm(F) & b= Sm(Max(F))≠ø)).

Vi definerer så Q;0 ved

Q;0 = Mg(a: aêC;0 & c;0(a) ≠ø)

Tilslutt lar vi V;0 være den verditilordningen for L;m som tilordner hver utsagnsbokstav pk i L;m mengden av alle de wêX;0 der pkêw. Med andre ord setter vi:

V;0(pk) = Sm(pk) om kêNat.

Vi har nå, som man ser, konstruert en modell M' = <<X;0,Q;0,c;0>,V;0> der Δ er inkludert i en eller annen S-maksimalt konsistent mengde wêX;0.

Det som nå må gjøres er å vise at denne modellen M' oppfyller de kravene om ble nevnt i §2.1. I så fall må man vise at <X;0,Q;0,c;0> oppfyller kravene som stilles til en M-utvalgsstruktur. Dette innebærer at vi må vise de følgende ting i lys av definisjonen av M-utvalgsstruktur:

(i) Q;0 Inkl Pt(X;0)
(ii) Func(c:0) & Dom(c;0) =Q;0 &Rgn(c;0) Inkl Q;0
(iii) (Aa)(aêQ;0 –> c;0(a) Inkl a)
(iv) (Aa)(aêQ;0 –> c;0(a)≠ø)
(v) For alle a;1,....,a;nêQ;0 (n≥2) gjelder at dersom a;nΩc;0(a;1)≠ø og SN/k,1,n-1/(a;kΩc;0(a;k+1)≠ø) så har man:
SN/k,1,n–1/(c;0(a;k)Ωa;k+1 = a;kΩc;0(a;k+1))
(vi) Un(Q;0) Inkl X;0.

Det skulle være klart fra måten vi har konstruert modellen M' på at (i) holder. Når det gjelder (ii), anta at <a,b;1>,<a,b;2>êc;0 for å vise at b;1=b;2 Fra definisjonen av c;0 følger da at det må finnes formler F;1 og F;2 der vi har:

a=Sm(F;1) & b;1= Sm(Max(F;1))≠ø og
a=Sm(F;2) & b;2= Sm(Max(F;2))≠ø

Dette impliserer Sm(F;1)= Sm(F;2). Fra definisjonen av Sm følger:

(Aw)(wêX;0 –> (F;1êw <–> F;2êw)). I lys av egenskapene til maksimalt konsistente mengder har vi fra dette at (Aw)(wêX;0 –> (F;1 <–>F:2)êw). Fra dette og Teorem 3.2.5 kan man slutte (Aw)(wêX;0 –> Nec(F;1 <–>F;2)êw). Fra dette og aksiomet A1 har man (Aw)(wêX;0 –> (Max(F;1) <–> Max(F;2))êw). Dette innebærer at (Aw)(wêX;0 –> (Max(F;1)êw <–> Max(F;2)êw)). Men herav kan vi i lys av definisjonen av Sm slutte b;1=Sm(Max(F;1)) = Sm(Max(F;2)) =b;2. Dette viser at c;0 er en funksjon.

Anta aêDom(c;0). Da finnes b slik at <a,b>êc;0. Dette impliserer at det finnes FêFm(L;m) slik at a=Sm(F) & b= Sm(Max(F))≠ø. Vi må vise at dette impliserer aêC;0 & c;0(a) ≠ø. At aêC;0 er åpenbart i lys av definisjonen av C;0. Nå har vi at c;0(a) = b siden <a,b>êc;0 og c;0 er en funksjon. Men b≠ø. Det følger at c;0(a)≠ø og derfor at aêQ;0 ifølge definisjonen av Q;0. Er på den annen side aêQ;0 for vilkårlig Q;0 har man at aêC;0 & c;0(a)≠ø. Vi må i så fall vise at det finnes b slik at <a,b>êc;0, med andre ord at (Eb)(b=c;0(a)). Men dette skulle være klart siden c;0(a)≠ø innebærer at zêc;0(a).

Det neste som må bevises er at Rgn(c;0) Inkl Q;0. Anta derfor at <a,b>êc;0 for noe a. Fra definisjonen av c:0 må det da finnes det en formel F i L;m slik at a=Sm(F) & b= Sm(Max(F))≠ø. Det skulle da være klart at (EG)(GêFm(L;m & b=Sm(G)). Dette impliserer at bêC;0. Men vi må også vise at c;0(b)≠ø. Dette innebærer at vi må vise at c;0(Sm(Max(F)))≠ø. Siden Sm(Max(F))≠ø følger det at Max(F)êw for noen wêX;0. Siden vi har Th;S(Max(F) –> Pos(Max(F))) i lys av A2 følger at Pos(Max(F))êw. Nå har vi Th;S(Pos(Max(F)) –> Pos(Max(Max(F)))). Dette innebærer at derfor at Pos(Max(Max(F))êw. Fra dette kan vi slutte at det finnes en w'êX;0 slik at Max(Max(F))êw' og derfor at Sm(Max(Max(F)))≠ø. Nå har vi at c;0(Sm(Max(F))) = Sm(Max(Max(F))). Det følger at c;0(Sm(Max(F)))≠ø som er det vi ønsker. Vi har nå vist at krav (ii) også holder.

Vi har nå vist at strukturen <X;0,Q;0,c;0> oppfyller kravene (i) og (ii). Anta aêQ;0. Da har vi aêC;0 & c;0(a) ≠ø. Da har vi siden aêC;0 at a= Sm(F) for en eller annen formel F. Det følger at c;0(a) = Sm(Max(F)). Anta wêc;0(a) for en eller annen vilkårlig verden w. Da har man Max(F)êw. Nå har vi siden A2 er et aksiom i S at Th;S(Max(F)–> F). Dette innebærer at (Max(F)–>F)êw. Det følger at Fêw. Men da wêSm(F)=a. Man har følgelig at c;0(a) Inkl a om aêQ;0. Dette viser at krav (iii) holder.

Fra definisjonen av Q;0 følger det at hvis aêQ;0 så har man c;0(a)≠ø. Dette viser at også (iv) ovenfor holder.

La oss så vise (v). Anta a;1,...,a;nêQ;0 der n≥2 og at følgende to ting holder:

(1) a;nΩc;0(a;1)≠ø

(2) SN/k,1,n-1/(a;kΩc;0(a;k+1)≠ø)

Vi ønsker å vise at SN/k,1,n–1/(c;0(a;k)Ωa;k+1 = a;kΩc;0(a;k+1)) Siden a;1,...,a;nêQ;0 følger at (3) a;j = Sm(F;j) for j=1,...,n. Fra (1) følger at det finnes wêX;0 slik at (4) wêa;nΩc;0(a;1). Videre følger fra (2):

(5) (Ai)(1≤k≤n-1 –> (Ew)(wê(a;kΩc;0(a;k+1)) Fra (4),(5) og definisjonen ac c;0 følger det at man har:

(6) (Ew)(wêX;0 & (F;n&Max(F;1))êw)

(7) (Ai)(1≤k≤n-1 –> (Ew)(wêX;0 &(F;kΩMax(F;k+1))êw)

Fra (6) og (7) har man i lys av Teorem 3.2.5 for alle wêX;0 at:

(8) Pos(F;n&Max(F;1))êw

(9) (Ai)(1≤k≤n-1 –> (Pos(F;kΩMax(F;k+1)))êw

Fra (8) og (9) følger:

(10) Konj/1≤k≤(n-1)/(Pos(F;k& Max(F;(k+1)))) & Pos(F;n &Max(F;1)êw i lys av Teorem 3.2.5. Men siden A3 er et aksiom i S – vi forutsetter nå at S er logikken M eller en utvidelse av denne med nye aksiomskjemaer – følger at A3êw og derfor at:

(11) Konj/1≤k≤(n-1)/(Nec(Max(F;k)& F;(k+1)<–> F;k& Max(F;(k+1)))) êw

Anta nå for vilkårlig k og w', der 1≤k≤n-1, at w'êc;0(a;k)Ωa;k+1. Dette innebærer i lys av definisjonen av c;0, siden a;k=Sm(F;k), at (Max(F;k)&F;k+1)êw'. Fra dette, (11) og Teorem 3.5.2 følger: F;k& Max(F;(k+1))êw'. Dette impliserer w'êSm(F;k) og dessuten at w'êSm(Max(F;k+1)). Da har man i lys av definisjonen av c;0 at w'êa;kΩc;0(a;k+1). Dette viser at c;0(a;k)Ωa;k+1 Inkl a;kΩc;0(a;k+1). Inklusjonen den andre veien vises på en analog måte. Man har altså:

SN/k,1,n–1/(c;0(a;k)Ωa;k+1 = a;kΩc;0(a;k+1))

Vi har dermed også vist at (v) holder.

Det gjenstår tilslutt å vise at Un(Q;0) Inkl X;0. Anta derfor wêUn(Q;0). Dette vil si at det finnes b slik at wêb &bêMg(a: aêC;0 & c;0(a) ≠ø). Da har man bêC;0 og derfor at b=Sm(F) for en eller annen formel F i L;m. Da har man at wêSm(F) og i lys av definisjonen av Sm følger herav: wêX;0. Dette viser at (6) holder. Vi har dermed vist at <X;0,Q;0,c;0> oppfyller kravene til en M-utvalgsstruktur.

Vi har nå vist at gitt en eller annen S-konsistent mengde med formler Δ finnes det en modell M;0 = <<X;0,Q;0,c;0>,V;0> der man har at det finnes en wêX;0 slik at Δ Inkl w. For å avslutte fullstendighetsbeviset er det nå tilstrekkelig å vise den følgende sats:

Teorem 3.2.6 Anta M;0=<<X;0,Q;0,c;0>,V;0> er den modellen for L;m som vi har konstruert ovenfor. Da gjelder for alle FêL;m og alle wêX;0 at

(+) True(F,L;m,w,M;0) <–> Fêw

Bevis: Dette bevises ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av formler i L. Den holder åpenbart om F er en setningsbokstav. Man viser også lett at (+) holder om F =G&H, ¬G,

GvH, G–> H, G<–>H, Pos(G) eller Nec(G) gitt at satsen holder for G og F. Det eneste trinnet i induksjonsbeviset som vi derfor behøver å betrakte separat er tilfellet der F= Max(G). Da har vi:

(1) True(F,L;m,w,M;0) <–>
Mg(w: True(F,L;m,w,M;0))êQ;0 &wêc(Mg(w: True(F,L;m,w,M;0)))

Fra induksjonshypotesen har man nå:

(2) Mg(w: wêX;0 &True(F,L;m,w,M)) = Mg(w: Fêw &wêX;0) = Sm(F)

Vi har derfor:

(3) True(F,L;m,w,M;0) <–> Sm(F)êQ;0 & wêc;0(Sm(F))
<–> Sm(F)êMg(a: aêC;0 & c;0(a) ≠ø) & wêc;0(Sm(F)
<–> c;0(Sm(F))≠ø & wêSm(Max(F))
<–> Max(F)êw.

Når det gjelder den siste bikondisjonalen er det klart at wêSm(Max(F)) impliserer wêX;0 &Max(F)êw. Er på den annen side Max(F)êw har man wêSm(Max(F)). Da følger i lys av definisjonen av c;0 at c;0(Sm(F))=Sm(Max(F))≠ø. Dette viser at den siste bikondisjonalen i (3) holder. Dette avslutter beviset for Teorem 3.2.6. **Q.E.D.**

Vi har nå i det vesentlige bevist fullstendigheten til logikken M. Resultatet kan oppsummeres slik:

Teorem 3.2.7 (a) Anta Δ er en M-konsistent mengde med formler i L;m. Da finnes det en modell M= <<X,Q,c>,V> og et element wêX slik at for enhver formel FêΔ har man True(F,L;m,w,M).

(b) Anta F er en formel i L;m da gjelder:
Th;M(F) <–> Val(F)

Bevis: Når det gjelder punkt (a) er det som nevnt bevist ovenfor. Anta Δ er en M-konsistent mengde med formler i L;m. Da kan Δ utvides til en maksimalt konsistent mengde Δ'. Konstruer så en modell M;0 = <<X;0,Q;0,c;0>,V;0> slik som ovenfor. Da har vi Δ'êX;0. Det følger at det finnes et element wêX;0 der vi har (AF)(FêΔ –> Fêw). Men i lys av dette og Teorem 3.2.6 har vi at
(AF)(FêΔ –> True(F,L;m,w,M;0)). Dette viser at punkt (a) holder.

Når det gjelder punkt (b) følger kondisjonalen mot høyre fra gyldighetsteoremet som vi har bevist tidligere, Teorem3.1.1. Når det gjelder kondisjonalen mot venstre kan man først anta at ¬Th;M(F). Da har vi åpenbart at ¬Th;M(¬¬F). Dette innebærer at {¬F} er en M-konsistent mengde. Det følger da ved hjelp av punkt (a) at det finnes en modell M=<<X,Q,c>,V> og et element i wêX slik at (AG)(Gê{¬F} –> True(G,L;m,w,M)). Dette siste innebærer ¬True(F,L;m,w,M). Det følger at F ikke er gyldig, ie ¬Val(F). **Q.E.D.**

Dermed har vi bevist fullstendigheten til kalkylen M.

§ 3.3 Klassen av preferanseteoretiske modeller for L;m

Den klassen av modeller som ble innført i §2.1 skal vi kalle for klassen av M-utvalgsmodeller for L;m. Denne klassen av modeller skal heretter betegnes ved hjelp av uttrykket "M-ChMod".

Imidlertid kan man definere en annen type av modeller for L;m, de preferanseteoretiske. Denne modellklassen skal her betegnes med uttrykket "Pref;m".

Med en preferanseteoretisk modell for L;m forstås en struktur

S= <<X,Q,R>,V> som oppfyller de følgende krav: (i) X≠ø og Pref(R,X) og Q skal være en mengde av delmengder av X, dvs. Q Inkl Pt(X). (ii) V er en funksjon som tilordner setningsbokstavene i L;m delmengder av X. Mao. skal det være slik at V: Var(L;m) –> Pt(X).

Vi trenger komponenten Q i en preferanseteoretisk modell av grunner som straks vil bli litt klarere.

Anta M = <<X,Q,R>,V> er en preferanseteoretisk modell, wêX og FêFm(L;m). Uttrykket "True(F,L;m,w,M)", som leses "Formelen F i L;m er sann i verdenen w i modellen M" defineres da induktivt på samme måte som i §2.1 bortsett fra at vi erstatter klausul (9) med:

(9') True(Max(F), L;m,w,M) <–> [Mg(w: True(F,L;m,w,M))êQ &
wêMax(R,Mg(w: True(F,L;m,w,M)))]

Den fulle definisjonen av "True(Max(F), L;m,w,M)" blir nå:

(1) True(pk,L;m,w,M) <–> wêV(pk)
(2) True(F&G, L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) & True(G,L;m,w,M))
(3) True(FvG,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) v True(G,L;m,w,M))
(4) True(F–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) –> True(G,L;m,w,M))
(5) True(F<–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) <–> True(G,L;m,w,M))
(6) True(¬F,L;m,w,M) <–> (¬True(F,L;m,w,M))
(7) True(Nec(F), L;m,w,M) <–> (Aj)(jêX –> True(F,L;m,j,M))
(8) True(Pos(F), L;m,w,M) <–> (Ej)(jêX & True(F,L;m,j,M))
(9') True(Max(F), L;m,w,M) <–> [Mg(w: True(F,L;m,w,M))êQ &
wêMax(R,Mg(w': True(F,L;m,w',M)))]

På dette punkt minnes det om at uttrykket "Max(R,X)" som brukes i klausul (9') er definert ved:

Max(R, X) = Mg(y: yêX & (Az)(zêX –> yRx))

Tilslutt defineres gyldighet i en preferanseteoretisk modell, i symboler "Val;p(F)" ved:

Val;p(F) <–> (AM)(MêPref;m –> (Ay)(yê(M);1 –> True(F,L;m,y,M)))

Dermed har vi eksakt avgrenset de preferanseteoretiske modellene og og definert hva som menes med gyldighet i forbindelse med denne typen av modeller.

§ 3.3.1 Fullstendigheten til M med hensyn på de preferanseteoretiske modellene.

Anta nå at M=<<X,Q,R>,V>êPref;m. Definer videre Q' og c' ved:

Q' = Mg(a: aêQ & Max(R,a)≠ø
c' = Mg(<a, Max(R,a)>: aêQ')

I lys av Teorem 1.2 og definisjonen av utvalgsstruktur-modell har man da at M' =<<X,Q',c'>,V> er med i klassen av utvalgsstrukturmodellene, ie. at M'êMCh-Mod. Videre er det meget lett å sjekke ved et enkelt induksjonsbevis at:

(1) (AF)(FêFm(L,m) –> (True(F,L;m,w,M) <–> True(F,L;m,w,M')))

om w er et vilkårlig element i X.

Fra dette følger:

Teorem 3.1.1.1 (AF)(FêFm(L;m) –> (Val(F) –> Val;p(F)))

Vi kan imidlertid også bevise det omvendte. Anta M = <<X,Q,c>,V> er en M-utvalgsstruktur modell. Da har man per definisjon at <X,Q,c> er en M-utvalgsstruktur og i lys av Teorem 1.1 finnes da en relasjon R slik at: B(<X,Q,c>,R). Da har man at Pref(R,X). Setter man nå:

M;0 = <<X,Q,R>,V> har man ved hjelp av Teorem 1.1 og definisjonen av B(S,R) at: (Aa)(aêQ –> c(a) = Max(R,a)). Ved hjelp av dette kan man så ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av formler i L;m bevise:

(2) (AF)(FêFm(L,m) –> (True(F,L;m,w,M) <–> True(F,L;m,w,M;0)))

om w er et vilkårlig element i X. Fra (2) følger:

Teorem 3.1.1.2 (AF)(FêFm(L;m) –> (Val;p(F) –> Val(F)))

Fra denne satsen og fullstendighetsteoremet i §3.2 følger videre:

Teorem 3.1.1.3 (AF)(FêFm(L;m) –> (Th;M(F) <–> Val;p(F)))

Naturlig nok har man, noe som fremgår fra det som har blitt nevnt ovenfor og selve beviset for Teorem 3.2.7 at

Teorem 3.1.1.4 (a) Anta F er en formel i L;m da gjelder:
Th;M(F) –> Val;p(F)

(b) Anta Δ er en M-konsistent mengde med formler i L;m. Da finnes det en modell M= <<X,Q,c>,V>êPref;m og et element wêX slik at for enhver formel FêΔ har man True(F,L;m,w,M).

Tar man i betraktning det faktum at Hanssons teorem, Teorem 1.1 i høyeste grad er ikke-trivielt – beviset bør karakteriseres som teknisk sett temmelig intrikat – er Teorem 3.1.1.4 også et ikke-trivielt resultat. Derimot er fullstendighets-resultatet Teorem 3.2.7 av en mer rutinemessig og overfladisk natur.

§4 Om komponenten Q i de preferanseteoretiske modellene for L;m

Vi har gitt en rigorøs definisjon av Pref;m, de preferanseteoretiske modellene, ovenfor. Visse aspekter ved denne modellklassen bør nå diskuteres. Et iøynefallende trekk ved en M= <<X,Q,R>,V>êPref;m er komponenten Q. Det mest naturlige ville kanskje ha vært at denne komponenten hadde blitt "kuttet vekk" fra modellene. La oss derfor definere ytterligere en klasse av modeller for L;m, Pref;0, de rene preferanseteoretiske modellene.

Vi sier at <X,R,V> êPref;0 hvis og bare hvis man har at X er en ikke-tom mengde, R er en preferanserelasjon over X, ie. Pref(R,X) og V er en funksjon som tilordner setningsbokstavene i L;m delmengder av X, mao:

V: Var(L;m) –> Pt(X).

Er M=<X,R,V> definerer vi True(F,L;m,w,M) nøyaktig som i § 3.3, bortsett fra at vi endrer klausulen for "Max(F)" til:

(+) True(Max(F), L;m,w,M) <–> wêMax(R,Mg(w': True(F,L;m,w',M)))

Hvordan er denne nye klassen av modeller for L;m relatert til Pref;m? Betrakt delmengden A Inkl Pref;m som er avgrenset slik:

En modell M = <<X,Q,R>,V>êA hvis og bare hvis (i) MêPref;m og (ii) Q= Mg(a: aêPt(X) & Max(R,a)≠0).

Det man kan vise er at A og Pref;0 i det vesentlige er ekvivalente modellklasser. La oss definere en avbildning X;1: Pref;0 –> A slik:

Anta M= <X,R,V>êPref;0. Da setter man:

X;1(M) = <<X, Mg(a: aêPt(X) & Max(R,a)≠ø),R>,V>

Det er da tydelig at X;1 er en-entydig og at den også er sûrjektiv, dvs. på A. Man har altså at: X;1 : Pref;0 –(1-1,på) –> A.

Det skulle være nokså åpenbart at man har:

Teorem 4.1 Er M = <X,R,V>êPref;0, videre jêX og FêFm(L;m) gjelder:
True(F,L;m,j,M) <–> True(F,L;m,j, X;1(M))

Det følger fra dette at alle formler i L,m som er gyldige med hensyn på A er gyldige med hensyn på Pref;0.

La oss definere, om X Inkl Pref;m uttrykket Val(X,F) ved:

Val(X,F) <–> (AM)(MêX –> (Aj)(jê(M);1 –> True(F,L;m,j,M)))

Det kan også være hensiktsmessig å innføre de følgende mer generelle begrepsdannelser. Anta Y er en eller annen klasse med modeller for L og anta videre at vi for hver modell i Y vet hva som menes med domenet i modellen. Dette betegnes med "D(M)" om M er en eller annen modell i Y. I enhver modell av de typene som vi så langt har betraktet er alltid den første komponenten domenet. Anta videre at "True(F,L;m,w,M)" er definert for alle modeller i Y.
Da setter vi:

Val(Y,F) <–> (AM)(MêY–> (Aj)(jê(M);1 –> True(F,L;m,j,M)))
Val(A,F) <–> (AM)(MêA–> (Aj)(jê(M);1 –> True(F,L;m,j,M)))

Er MêY setter man:

Val(M,F) <–> (Aj)(jêD(M) –> True(F,L;m,j,M)).

Innføres disse definisjonene kan det resultatet vi kom frem til rett ovenfor formuleres slik:

Teorem 4.2 FêFm(L;m) –> (Val(Pref;0,F) <–> Val(A,F))

En ting som imidlertid ikke er klart er hvorvidt er hvorvidt følgende holder:

(#) (AF)(FêFm(L;m) –> (Val(A,F) <–> Val(Pref;m,F)))

Hvis dette var tilfelle kunne man bevise en sterkere versjon av fullstendighets-teoremet Teorem 3.1.1.4. I lys av dette dette teoremet og Teorem 4.2 er (#) ekvivalent med:

(AF)(FêFm(L;m) –> (Th;M(F) <–> Val(Pref;0,F)))

Men det er altså ikke klart at (#) holder. Snarere synes det som om man bør forvente det motsatte. Vi betrakter den følgende formel i L;m:

(∂) Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) –> Pos(Max(FvG)).

Det er lett å verifisere at denne formelen er gyldig i modellklassen A, med andre ord at man har: Val(A,∂). Men er M= <<X,Q,R>,V>êPref;m og har man at

(1) Mg(w: True(F,L;m,w,M)) êQ og Mg(w: True(G,L;m,w,M)) êQ

er det ikke noe som direkte tilsier at:

(2) Mg(w: True(FvG,L;m,w,M)) êQ.

Hvis det finnes modeller i klassen Pref;m hvor (1) holder, men (2) ikke holder er det klart at ¬Val(Pref;m,∂).

§4.1 Kalkylen M+

La oss kalle formelen ∂ i forrige paragraf for A4. Kalkylen M utvidet med denne formelen som nytt aksiomskjema kalles for M+.

Vi skal definerer to nye modellklasser som denne kalkylen er komplett med hensyn på.

Klassen av alle de modeller M=<<X,Q,R>,V>êPref;m som oppfyller kravet: (Aa)(Ab)(a,bêQ –> aUbêQ) betegner vi nå med "M+Pref;m". Man har:

A Inkl M+Pref;m Inkl Pref;m.

Vi definerer videre en underklasse av utvalgsstruktur-modeller slik: Klassen av alle de utvalgsstruktur-modeller M=<<X,Q,c>,V>êMCh-Mod som er slik at (Aa)(Ab)(a,bêQ –> aUbêQ) betegnes med M+Ch-Mod.

Det skulle være temmelig enkelt å se at den kanoniske modellen som ble konstruert i §3.2 er slik at (Aa)(Ab)(a,bêQ;0 –> aUbêQ;0) om A4 er blandt aksiomene i den underliggende logikken. Siden man videre lett kan verifisere at A4 er gyldig i enhver modell i klassen M+Ch-Mod, med andre ord at Val(M+Ch-Mod,A4), følger det at denne fullstendighetssatsen holder:

Teorem 4.1.1 Anta FêFm(L;m). Da gjelder:
Th;M+(F) <–> Val(M+Ch-Mod,F).

Nå er det også nokså lett å vise – det skjer på samme måte som i §3.3.1 at man har:

(1) (AF)(FêFm(L;m) –> (Val(M+Ch-Mod, F) <–> Val(M+Pref;m, F)))

Oppgaven å verifisere denne påstanden overlates til leseren. Fra dette og Teorem 4.1.1 følger også følgende teorem:

Teorem 4.1.2 Anta FêFm(L;m). Da gjelder:

Th;M+(F) <–> Val(M+Pref;m, F).

Merk at i beviset for (1) må man benytter Teorem 1.1 og Teorem 1.2.

Man kan nå spørre om det sterkere systemet M+ er komplett med hensyn på modellklassen A, eller hva som går ut på det samme, om det er komplett med hensyn på Pref;0. Dette problemet er ekvivalent med spørsmålet om den følgende påstand holder eller ikke:

(2) (AF)(FêFm(L;m) –> (A, F) <–> Val(M+Pref;m, F)))

Vi har ikke så langt lykkes i å avgjøre dette. Vi bemerker bare at det følgende er en tilstrekkelig betingelse for (2):

(3) (EX)(Func(X) & Dom(X)= M+Pref;m & Rgn(X) Inkl A &
(AM)(MêM+Pref;m –> (M);1 = (X(M));1) &
(AF)(AM)(FêFm(L;m) & MêM+Pref;m –> (Aj)(jê(M);1 –>
(True(F,L;m,j,M) <–> True(F,L;m,j,X(M)))))

Vi vet imidlertid ikke om det er mulig å konstruere en slik avbildning X. Dette problemet får derfor stå åpent.

§ 4.2 Kalkylen M++

I forbindelse med logikken M+ kan det være av interesse å betrakte et system som tilsynelatende er noe sterkere. Den følgende formel kalles A5:

A5 Pos(F) –> Pos(Max(F))

Den logikken som fås som resultat når A5 legges til listen over aksiomer i M kalles her for "M++". Det er naturlig å betrakte to modellklasser i forbindelse med denne logikken:

Modellklassen M++Pref;m er klassen av alle de modeller M=<<X,Q,R>,V> der MêPref;m og som dessuten oppfyller det følgende krav:

(AF)(FêFm(L;m) & Mg(w: True(F,L;m,w,M))≠ø –>
Mg(w: True(F,L;m,w,M))êQ & Max(R,Mg(w: True(F,L;m,w,M)))≠ø)

Dette gir en presis avgrensning av M++Pref;m.

På den annen side har vi følgende mengden M++ChMod av utvalgs-strukturmodeller. En modell M=<<X,Q,c>,V>êM++ChMod hvis og bare hvis vi har at

(i) <<X,Q,c>,V>êMCh-Mod
(ii) (AF)(FêFm(L;m) & Mg(w: True(F,L;m,w,M))≠ø –>
Mg(w: True(F,L;m,w,M))êQ & c(Mg(w: True(F,L;m,w,M)))≠ø)

Det er forholdsvis lett å se at disse to ny-introduserte modellklassene er ekvivalente, dvs., mer nøyaktig formulert at man har:

Teorem 4.2.1 (AF)(FêFm(L;m) –> (Val(M++Pref;m,F) <–> Val(M++ChMod,F)))

Vi overlater det detaljerte beviset for dette til leseren.

Man kan også vise at systemet M++ er komplett med hensyn på de to modellklassene. Dette innebærer at den følgende sats holder:

Teorem 4.2.2 (AF)(FêFm(L;m) –> (Th;M++(F) <–> Val(M++ChMod,F)))

Bevis: På samme måte som i beviset for Teorem 3.2.6 konstrueres en kanonisk modell M' = <<X;0,Q;0,c;0>,V;0>. Det vil være tilstrekkelig å vise at denne oppfyller kravet

(AF)(FêFm(L;m) & Mg(w: True(F,L;m,w,M'))≠ø –>
Mg(w: True(F,L;m,w,M'))êQ;0 & c(Mg(w: True(F,L;m,w,M')))≠ø)

Anta derfor at Mg(w: True(F,L;m,w,M'))≠ø for vilkårlig formel F. Da har man at Sm(F)≠ø og derfor at Fêw for noen wêX;0. Da har man Pos(F)êw siden Th;M++(F –> Pos(F)). Siden A5 er et aksiom i M++ følger da at man har Pos(Max(F))êw. Dette innebærer at Max(F)êw' for en eller annen w'êX;0. Men da kan man slutte at Sm(Max(F))≠ø. Ved hjelp av definisjonen av c;0 følger i så fall: c;0(Sm(F))≠ø. Siden Sm(F) = Mg(w: True(F,L;m,w,M')) følger da c;0(Mg(w: True(F,L;m,w,M')))≠ø. Det er klart at Sm(F)êC;0. Vi har derfor Sm(F)= Mg(w: True(F,L;m,w,M'))êQ;0. Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Man kan vise noe mer i forbindelse med systemet M++ ved å relatere dette systemet til modellklassen Pref;0 som ble introdusert i §4. Vi definerer klassen M++Pref;0 ved å kreve at en modell M = <X,R,V>êM++Pref;0 hvis og bare hvis MêPref;0 og man dessuten har:

(AF)(FêFm(L;m) & Mg(w: True(F,L;m,w,M))≠ø –>
Max(R,Mg(w: True(F,L;m,w,M)))≠ø

Saken er nå at man kan vise at M++Pref;m og M++Pref;0 er ekvivalente modellklasser: Anta MêM++Pref;0 og at M=<X,R,V>. Definer en modell M' = <<X,Q,R>,V> der Q nå er definert som

Mg(a: a≠ø & (EF)(FêFm(L;m) & a= Mg(w: True(F,L;m,w,M))))

Ellers er X,R og V i M' som i M. Ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av formler i L;m godtgjør man:

(1) (AF)(FêFm(L;m) &wêX –> (True(F,L;m,w,M') <–> True(F,L;m,w,M)). På tilsvarende vis kan man gå den andre veien. Gitt M= <<X,Q,R>,V>êM++Pref;m kan man definere en M'êM++Pref;0 ved rett og slett å sette M'=<X,R,V>. Man kan så vise at (1) holder. Fra dette følger

Teorem 4.2.3 (AF)(FêFm(L;m) –> (Val(M++Pref;m,F) <–> Val(M++Pref;0,F)))

Fra dette og Teorem 4.2.2 kan man så utlede det følgende fullstendighetsresultat for kalkylen M++:

Teorem 4.2.4 (AF)(FêFm(L;m) –> (Th;M++(F) <–> Val(M++Pref;0,F)))

§5 Om sammenhengen mellom M - systemene og noen andre preferanselogiske systemer.

Vår neste oppgave er å studere nærmere sammenhengen mellom systemene M,M+ og M++ på den ene side og de preferanseteoretiske systemene vi tidligere har studert: P0, P1, P2 og P0-Det, P1-Det og P2-Det. Vi skal først se på forholdet mellom M++ og P0-Det.

Har man at R er en preferanserelasjon over X, Pref(R,X), defineres R* og ≈;r ved:

xR*y <–> (xRy & ¬(yRx))
x≈;r y <–> (xRy & yRx)

Det følgende teorem er av betydning i det følgende:

Teorem 5.1 Anta MêM++Pref;m og at M=<X,R,V>. Anta videre at wêX og at q1 og q2 er definert ved:

q1 = Mg(w: True(F,L;m,w,M) & q2 = Mg(w: True(G,L;m,w,M)

der F og G er formler i L;m. Under disse forutsetningene gjelder:

(1) True(Pos(Max(F)&Max(G)),L;m,w,M) <–>
Max(R,q1)Ω Max(R,q2)≠ø

(2) Er H = Pos(Max(FvG)&Max(G)) & Pos(Max(FvG)&Max(F)) har man:
True(H,L;m,w,M) <–>
(Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1 ≈;r x;2)

(3) Er H = Pos(F) & Pos(G)& ¬(Pos(Max(FvG)&Max(G))) har man:
True(H,L;m,w,G) <–>
(Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1 R* x;2)

Bevis: Ad (1). Anta hypotesen i teoremet holder og at
True(Pos(Max(F)&Max(G)),L;m,w,M). I lys av definisjonen av "True" og valuasjonsreglene for "Pos" og "Max" er dette ekvivalent med:
(Ej)(jêMax(R,q1) & jêMax(R,q2)). Men dette sier det samme som
Max(R,q1)Ω Max(R,q2)≠ø.

Ad (2). I lys av det som har blitt bevist rett ovenfor har man at venstre side i (2) er ekvivalent med de følgende to påstander:

(i) Max(R,q1Uq2)ΩMax(R,q2)≠ø

(ii) Max(R,q1Uq2)ΩMax(R,q1)≠ø

Fra (i) og (ii) følger følger eksistensen av w;1, w;2 der man har:

(iii) w;1êMax(R,q1Uq2) & w;1êMax(R,q2)

(iv) w;2êMax(R,q1Uq2) & w;2êMax(R,q1)

For å vise implikasjonen mot høyre er det nok å bevise at w;1 ≈;r w;2. Fra den første komponenten i (iii) følger : (Ax)(xêq1Uq2 –> w;1Rx) Videre følger fra den iste komponenten i (iv) at w;2êq1. Disse to ting impliserer w;1Rw;2. Fra den første komponenten i (iv) følger : (Ax)(xêq1Uq2 –> w;2Rx). Siden den andre komponenten i (i) impliserer w;1êq2 følger w;2 R w;1. Vi har derfor w;1≈;r w;2.

Anta på den annen side at den høyre siden i (2) holder. Dette innebærer at det finnes x;1,x;2 slik at x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1 ≈;r x;2. Vi har da i lys av definisjonen av Max-operatoren at:

(Ay)(yêq1 –> x1Ry) & (Ay)(yêq2 –> x;2Ry). Vi må vise at x;1,x;2êMax(R,q1Uq2). Det vil være nok å vise at x;1êMax(R,q1Uq2) siden
x;1 ≈;r x;2. Anta derfor yêq1Uq2 for vilkårlig y. Er yêq1 er det åpenbart at x;1Ry. Er yêq2 har vi x;2Ry. Men siden R er en preferanserelasjon og x;2≈;r x1 følger også i dette tilfellet at x;1Ry. Dette viser at (2) holder.

Ad (3). Venstre side i (3) er ekvivalent med:
(i) q1≠ø & q2≠ø & ¬(Max(R,q1Uq2)ΩMax(R,q2)≠ø). Siden MêM++Pref;0 følger at (ii) Max(R,q1)≠ø & Max(R,q2)≠ø. Dette innebærer at det finnes x;1,x;2 som er slik at x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2). I lys av det som ble bevist under foregående punkt kan man ikke ha x;1≈;r x;2. Anta for reduktio ad absurdum at x;2R*x1, mao. at x2 er strengt bedre enn x;1. Vi ønsker da å vise at

(iii) Max(R,q2) Inkl Max(R,q1Uq2). Anta derfor for vilkårlig w at wêMax(R,q2). Da har vi wêq2 Inkl q1Uq2. Vi vil vise at wêMax(R,q1Uq2). Det vil i så fall være

tilstrekkelig å godtgjøre at:

(Ay)(yêq1Uq2 –> wRy) Anta yêq1Uq2. Er yêq1 har vi siden x;1êMax(R,q1) at x;1Ry. Siden w,x;2êMax(R,q2) følger at w≈;r x;2 og siden x;2 nå antas å være slik at x;2R*x;1 følger at wRy. Er yêq2 har vi siden x;2êMax(R,q2) og wêMax(R,q2) at w≈;r x;2 Ry. Dette viser at (iii) holder. Men fra (i) følger:

Max(R,q1Uq2) Inkl –(Max(R,q2)). Siden Max(R,q2)≠ø gir dette og (iii) oss en motsigelse. Vi har derfor at hverken x;1≈;r x;2 eller x;2R*x1 holder. Vi må derfor ha x;1R*x;2 som sammen med (ii) gir oss det vi ønsker.

Anta nå på den annen side at det finnes x;1,x;2 slik at:

(iv) x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1 R* x;2. Da har vi at q1≠ø og q2≠ø og derfor at (v) True(Pos(F)&Pos(G),L;m,w,M). Det vil nå være tilstrekkelig å bevise: Max(R,q1Uq2)ΩMax(R,q2)=ø. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes w der (v) wêMax(r,q1Uq2) & wêMax(R,q2). Fra dette og (iv) følger w ≈;r x;2. Videre følger fra (v) at (Ay)(yêq1Uq2 –> wRy). Siden w≈;r x;2 følger herav: (Ay)(yêq1Uq2 –> x;2Ry). Men x;1êMax(R,q1) Inkl q1 Inkl q1Uq2. Man har derfor at x;2Rx;1. Dette strider imidlertid åpenbart mot den siste konjunkten i (iv). Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

§5.1 En utvidelse av språket L:m med to nye binære operatorer Pr og Ekv.

I det rent logiske vokabularet til språket L;m inngår de setningslogiske konnektivene ¬,&,v,–> og <–> samt de tre monadiske operatorene Pos, Nec og Max. Pos og Nec står for henholdsvis logisk mulighet og nødvendighet. En setning av typen Max(F) er sann i nøyaktig de beste av alle de verdenene hvor setningen F er sann. Uttrykket "Max(F)" kunne derfor, som vi tidligere nevnte, leses: "Utsagnet om er sant i nøyaktig de beste verdenene hvor det er tilfelle at F er faktisk sant".

Vi skal nå utvide språket L;m med to nye binære setningsdannende konstruksjoner på setninger, nemlig Pr og Ekv. Det er hensikten at en setning av typen Pr(F,G) skal regne som sann i en verden w hvis og bare hvis de beste verdenene hvor setningen F er sann er strengt bedre enn de beste verdenene hvor setningen G er sann. Tilsvarende skal en setning av typen Ekv(F,G) regnes som sann i en verden w hvis og bare hvis de beste verdenene hvor F er sann er nøyaktig like gode som de beste verdenene hvor setningen G er sann.

Vi utvider altså det logiske vokabularet til L;m med disse to konstruksjonene og føyer til den følgende nye regel for konstruksjon av velformede formler, nemlig: Er F og G to velformede formler er Pr(F,G) og Ekv(F,G) det også. Dette nye setningslogiske språket vil i det følgende bli betegnet med "L;p".

La oss nå definere en ny logikk, M++;u innenfor rammen av dette språket. Logikken vil være presist avgrenset om man angir aksiomene og slutnings-reglene i den.

Aksiomskjemaene i denne logikken er de følgende: (a) Et vanlig standardsett for ren setningslogikk f.eks. skjemaene SL1 – SL3. (b) Skjemaene ML1 –ML5 for modalsystemet S5. (c) A1 –A5 som vi har angitt tidligere. (d) Endelig tar vi med de følgende to aksiomer for operatorene Pr og Ekv:

A6 Pr(F,G) <–> [Pos(F)& Pos(G) & ¬(Pos(Max(FvG)&Max(G)))]
A7 Ekv(F,G) <–> [Pos(Max(FvG)&Max(G)) & Pos(Max(FvG)&Max(F))]

Dette avslutter listen over aksiomer i M++;u. Slutningsregler i systemet er modus ponens, dvs.: Th(F) & Th(F–>G) –> Th(G), samt modal generalisering, ie. regelen som sier at dersom F er et teorem så er Nec(F) det også.

I det følgende vil forholdet mellom logikken M++ og M++;u bli nærmere studert. Vi skal i den neste paragrafen definere en bestemt klasse av modeller for systemet M++;u og vise et fullstendighetsresultat for dette systemet.

Imidlertid vil vi først definere en avbildning J;0 av formlene i L;p inn i formlene i L;m og nevne sats om denne som vi vil forsøke å bevise.

Avbildningen J;0 av Fm(L;p) –> Fm(L,m) er definert induktivt på lengden av formler i L;p ved de følgende punkter:

(1) J;0(pk) = pk (k≥1)
(2) J;0(¬F) = ¬J;0(F)
(3) J;0(F&G) = J;0(F)&J;0(G)
(4) J;0(FvG) = J;0(F)vJ;0(G)
(5) J;0(F–>G) = J;0(F)–>J;0(G)
(6) J;0(F<–>G) = J;0(F)<–>J;0(G)
(7) J;0(Pos(F)) = Pos(J;0(F))
(8) J;0(Nec(F)) = Nec(J;0(F))
(9) J;0(Max(F)) = Max(J;0(F))
(10) J;0(Pr(F,G)) = [Pos(J;0(F))& Pos(J;0(G)) & ¬(Pos(Max(J;0(F)vJ;0(G))&Max(J;0(G))))]
(11) J;0(Pr(F,G)) = (Pos(Max(J;0(F)vJ;0(G))&Max(J;0(G))) & Pos(Max(J;0(F)vJ;0(G))&Max(J;0(F)))

Fra definisjonen av språket L;p ser man at alle formlene i L;m er inkludert i L;p, med andre ord at man har Fm(L;m) Inkl Fm(L;p). Studerer man definisjonen av J;0 litt nærmere ser man lett at J;0 avbilder alle formlene i L;m på seg selv. Dette innebærer at J;0(F)=F om FêFm(L;m). Man ser også at klausulene (10) og (11) svarer til aksiomene A6 og A7. Fjerner man i (10) og (11) alle forekomster av "J;0" og erstatter "=" med "<–>" får man i det vesentlige disse to aksiomene som resultat.

En av de satsene vi tar sikte på å bevise i det følgende er denne:

(AF)(FêFm(L;p) –> [Th;(M++;u)(F) <–> Th;(M++)(J;0(F))])

Denne setningen uttrykker at dersom F er en formel i L;p så er F et teorem i systemet M++;u hvis og bare hvis J;0(F) er et teorem i systemet M++.

Vi skal bevise denne setningen ved modellteoretiske metoder. La oss derfor gå over til modellteorien for kalkylen M++;u.

En preferanseteoretisk modell M for språket L;p er en struktur M=<X,R,V> som oppfyller de følgende krav:

(i) X er en ikke-tom mengde og R en preferanserelasjon over X, ie. Pref(R,X)
(ii) V: Var(L;p) –> Pt(X)
(iii) Er FêFm(L;p) & Mg(w: True(F,L;p,w,M))≠ø –> Max(R, Mg(w: True(F,L;p,w,M)))≠ø

Vi betegner klassen av alle de preferanseteoretiske modellene for L;p med M++;uPref;0.

Predikatet "Formelen F er sann i L;p i verdenen w i modellen M", i symboler "True(F,L;p,w,M)" defineres induktivt på følgende måte:

(1) True(pk,L;m,w,M) <–> wêV(pk)
(2) True(F&G, L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) & True(G,L;m,w,M))
(3) True(FvG,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) v True(G,L;m,w,M))
(4) True(F–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) –> True(G,L;m,w,M))
(5) True(F<–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) <–> True(G,L;m,w,M))
(6) True(¬F,L;m,w,M) <–> (¬True(F,L;m,w,M))
(7) True(Nec(F), L;m,w,M) <–> (Aj)(jêX –> True(F,L;m,j,M))
(8) True(Pos(F), L;m,w,M) <–> (Ej)(jêX & True(F,L;m,j,M))
(9) True(Max(F), L;m,w,M) <–> [wêMax(R,Mg(w: True(F,L;m,w,M)))]

Setter man q1 = Mg(w: True(F,L;m,w,M)) og q2 = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) blir valuasjonsreglene for Pr(F,G) og Ekv(F,G) de følgende:

(10) True(Pr(F,G),L;m,w,M) <–> (Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1R*x;2)
(11) True(Ekv(F,G),L;m,w,M) <–> (Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1 ≈;r x;2)

Hva som menes med at en formel er gyldig i en bestemt modell M og hva som menes med at en formel er gyldig i en bestemt klasse av modeller Y defineres på vanlig måte.

Vi skal nå gi bevis for den følgende sats:

Teorem 5.1.1 Anta FêFm(L;p) & Mê(M++;uPref;0). Anta M=<X,R,V> og at wêX. da gjelder:

True(F,L;p,w,M) <–> True(J;0(F),L;m,w,M')

hvor M' er restriksjonen av modellen M til språket L;m, men ellers er som M

Bevis: Beviset er et temmelig trivielt induksjonsbevis på lengden av formler i L;p. Det skule være lett å se at satsen holder om F=pk for noe kêNat. Man har da at True(pk,L;p,w,M) <–> wêV(pk) <–> True(pk,L;m,w,M'). Er F = ¬G for en eller annen formel G i L;p har man:

True(¬G,L;p,w,M) <–> ¬(True(G,L;p,w,M)
<–> ¬(True(J;0(G),L;m,w,M') (ved hjelp av IH)
<–> True(¬J;0(G),L;m,w,M')
<–> True(J;0(¬G),L;m,w,M').

Trinnene for konstruksjonene &,v,–>.<–>, Nec og Pos overlates til leseren. La oss se på det tilfellet at F=Max(G). Da har man:

True(Max(G),L;p,w,M) <–> wêMax(R, Mg(w': True(G,L;p,w',M)))
<–> wêMax(R, Mg(w': True(J;0(G),L;m,w',M'))) (Jmf. IH)
<–> True(Max(J;0(G)),L;m,w,M')
<–> True(J;0(Max(G)),L;m,w,M')

Dette viser at satsen holder i det tilfelle at F=Max(G).

La oss se på det tilfellet at F= Pr(G,H). Da har man i lys av definisjonen av ovenfor om man forutsetter q1 = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) og q2 = Mg(w: True(H,L;m,w,M)) at:

True(Pr(G,H),L;p,w,M) <–> (Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1R*x;2)

Ved hjelp av induksjonshypotesen har man om man setter:

r1= Mg(w: True(J;0(G),L;m,w,M')) og
r2 = Mg(w: True(J;0(H),L;m,w,M'))

at q1 =r1 og q2=r2. Ved hjelp av Teorem 5.1 har man da om man setter
H = Pos(J;0(G)) & Pos(J;0(H))& ¬(Pos(Max(J;0(G)vJ;0(H))&Max(J;0(H))))
at følgende må holde:

True(H,L;m,w,M') <–>
(Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,r1) & x;2êMax(R,r2) & x;1 R* x;2)

Man ser fra dette at:
True(Pr(G,H),L;p,w,M) <–> True(H,L;m,w,M') <–> True(J;0(Pr(G,H)),L;p,w,M)
Dette viser at satsen også holder i det tilfellet F= Pr(G,H). Det tilfellet at
F= Ekv(G,H) overlates til leseren. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Det neste mål er å vise at M++;u er komplett med hensyn på modellmengden M++;uPref;0. Dette innebærer at vi ønsker å gi et bevis for den følgende sats:

Teorem 5.1.2 For enhver formel F i L;p har man at følgende gjelder:
Th;(M++;u)(F) <–> Val(M++;uPref;0, F)

I beviset for dette teoremet vil vi gå frem i to trinn. Vi vil først innføre en ny klasse av modeller. Vi skal i denne paragrafen kalle dem for P-modeller. Vi skal så vise at en formel i L;p er et teorem i M++;u hvis og bare hvis formelen er gyldig i nøyaktig de og bare de P-modellene som oppfyller et bestemt krav C1.

Med en P-modell for L;p forstår vi en struktur M= <<X,Q,c>,V> som oppfyller de følgende krav:

(i) <X,Q,c> er en M-utvalgsstruktur
(ii) V: Var(L;p) –> Pt(X)

Vi definerer hva som menes med at en formel F i L;p er sann i verdenen w i modellen M, "True(F,L;p,w,M)" ved den følgende induktive definisjon:

(1) True(pk,L;m,w,M) <–> wêV(pk)
(2) True(F&G, L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) & True(G,L;m,w,M))
(3) True(FvG,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) v True(G,L;m,w,M))
(4) True(F–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) –> True(G,L;m,w,M))
(5) True(F<–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) <–> True(G,L;m,w,M))
(6) True(¬F,L;m,w,M) <–> (¬True(F,L;m,w,M))
(7) True(Nec(F), L;m,w,M) <–> (Aj)(jêX –> True(F,L;m,j,M))
(8) True(Pos(F), L;m,w,M) <–> (Ej)(jêX & True(F,L;m,j,M))
(9) True(Max(F), L;m,w,M) <–> wêc(Mg(w: True(F,L;m,w,M))) &
c(Mg(w: True(F,L;m,w,M))êQ

Setter man Sm(F) = Mg(w: True(F,L;m,w,M)) skal de følgende valuasjonsregler gjelde for konnektivene Pr og Ekv:

(10) True(Pr(F,G),L;p,w,M) <–> Sm(F)≠ø & Sm(G)≠ø & c(Sm(FvG))Ωc(Sm(G))=ø
(11) True(Ekv(F,G),L;p,w,M) <–> c(Sm(FvG))Ωc(Sm(F))≠ø &

c(Sm(FvG))Ωc(Sm(G))≠ø

Dette avslutter definisjonen av sannhet i en P-modell.

Vi skal nå gi et bevis for at kalkylen M++;u er komplett med hensyn på klassen av P-modeller M = <<X,Q,c>;V> som oppfyller det følgende krav:

(AF)(FêFm(L;p) –> Mg(w: True(F,L;p,w,M))≠ø –> Mg(w: True(F,L;p,w,M))êQ

Vi skal altså bevise den følgende sats:

Teorem 5.1.3: La P+ betegne klassen av alle de P-modeller M som oppfyller kravet nevnt rett ovenfor. Da gjelder for enhver formel FêFm(L;p) :
Th;(M++;u)(F) <–> Val(P+, F)

Bevis: Når det gjelder gyldighetsdelen i dette teoremet overlater vi beviset for det til leseren.
I hovedtrekkene blir beviset for fullstendighetsdelen som det tilsvarende beviset for kalkylen M. Anta Δ er en M++;u -konsistent formelmengde i L;p. Da kan vi, på akkurat samme måte som i fullstendighetsbeviset for kalkylen M, konstruere en "kanonisk" struktur M;0 = <<X;0,Q;0,c;0>,V;0>. Vi viser så på samme måte som i det nevnte bevis at strukturen <X;0,Q;0,c;0> er en M-utvalgsstruktur og at V;0 er en funksjon som tilordner setningsbokstavene i L;p delmengder av X;0. Ser man på definisjonen av P-modell innebærer dette at M;0 faktisk er en slik modell. Det som derfor gjenstår er å vise to ting. For det første må man vise at M;0 oppfyller det kravet vi nevnte ovenfor:

(C1) (AF)(FêFm(L;p) –> Mg(w: True(F,L;p,w,M))≠ø –> Mg(w: True(F,L;p,w,M))êQ

For det andre må vi vise at det følgende lemma holder:

Lemma 5.1.1: Anta M;0=<<X;0,Q;0,c;0>,V;0> er den modellen for L;m som vi har konstruert ovenfor. Da gjelder for alle FêL;m og alle wêX;0 at
(+) True(F,L;m,w,M;0) <–> Fêw

Av disse to tingene beviser vi hjelpesetningen først. Setningen bevises ved et induksjonsbevis på lengden av formler i L;p. Beviset for dette er akkurat som ved beviset for M om F er en setningsbokstav eller en formel av typen ¬G, GvH, G&H,G–>H, G<–>H, Nec(G), Pos(G) eller Max(G). Det eneste nye er at vi må bevise at satsen også holder i det tilfelle at F = Pr(G,H) eller Ekv(G,H). Det kan være hensiktsmessig å gå detaljert gjennom disse to tilfellene.

Anta F= Pr(G,H). Vi må da vise:
(1) True(Pr(G,H),L;m,w,M;0) <–> Pr(G,H)êw
Nå har man i lys av definisjonen av "True" at
(2) True(Pr(G,H),L;m,w,M;0) <–> Sm(G)≠ø & Sm(H)≠ø &
c;0(Sm(GvH))Ωc;0(Sm(H))=ø
om man setter
(3.1) Sm(G) = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) og
(3.2) Sm(H) = Mg(w: True(H,L;m,w,M))
La oss først gi et bevis for kondisjonalen mot høyre i (1). Anta derfor at den venstre siden i

(2) holder. Vi ønsker å vise at (+) Pr(G,H)êw. I lys av induksjonshypotesen har man:

(4.1) Sm(G) = Mg(w: wêX;0 & Gêw)

(4.2) Sm(H) = Mg(w: wêX;0 & Hêw)

Fra dette og venstre side i (2) følger at det finnes w' og w" slik at Gêw'&Hêw". Dette innebærer at for alle verdener wêX;0 har man (5) (Pos(G)&Pos(H))êw. Anta nå for reduktio ad absurdum at (6) ¬(Pr(G,H)êw). Siden w er en maksimalt konsistent mengde følger da (7) (¬Pr(G,H))êw. Siden videre A6 er et aksiom i M++;u følger at:

Pr(G,H) <–> [Pos(G)& Pos(H) & ¬(Pos(Max(GvH)&Max(H)))] êw Fra dette, (5) og (7) har man at Pos(Max(GvH)&Max(H))) êw. Dette impliserer at det finnes en eller annen verden w;0 slik at Max(GvH)&Max(H))êw;0. Da følger Max(GvH)êw;0 og Max(H)êw;0 (Siden w;0 er en maksimalt konsistent mengde.) Dette innebærer at Sm(Max(GvH))ΩSm(Max(H)≠ø Men fra dette og definisjonen av c;0 følger da at c;0(Sm(GvH))Ω c;0(Sm(H))≠ø. Men dette strider mot venstre side i (2). Det følger at (6) er umulig og at man derfor må ha Pr(G,H)êw.

La oss så se på kondisjonalen den andre veien i (1). Anta Pr(G,H)êw. Siden A6 er et aksiom i M++;u og w er en maksimalt konsistent mengde følger da at:

(7) [Pos(G)& Pos(H) & ¬(Pos(Max(GvH)&Max(H)))]êw. Hadde man nå at c;0(Sm(GvH))Ω c;0(Sm(H))≠ø følger Sm(Max(GvH))ΩSm(Max(H)≠ø i lys av definisjonen av c;0. Dette impliserer at Max(GvH)&Max(H) êw;0 for en eller annen verden w;0. I sin tur har dette som konsekvens at Pos(Max(GvH)&Max(H))êw. Men dette strider mot (7). Derfor: c;0(Sm(GvH))Ω c;0(Sm(H))=ø. Fra (7) følger også Sm(G)≠ø & Sm(H)≠ø. Vi har derfor at venstre side i (2) holder og kan følgelig slutte at True(Pr(G,H),L;m,w,M;0).

Dette viser at hjelpesetningen holder i det tilfelle at F= Pr(G,H).

La oss også vise at den holder i det tilfellet at F= Ekv(G,H). Dette vil gjøre beviset for hjelpesetningen fullstendig.

I dette tilfellet må vi bevise:

(8) True(Ekv(G,H),L;m,w,M;0) <–> Ekv(G,H)êw

Anta venstre side i (8) holder. Fra dette og definisjonen av "True" i forbindelse med en P-modell følger at

c;0(Sm(GvH))Ωc;0(Sm(H))≠ø & c;0(Sm(GvH))Ωc;0(Sm(G))≠ø.

I lys av definisjonen av c;0 kan man fra dette slutte at det må finnes verdener w;1,w;2 slik at:

(9) Max(GvH)&Max(H)êw;1 & Max(GvH)& Max(G)êw;2. Siden w;1 og w;2 er maksimalt konsistente mengder følger det at

(10) [Pos(Max(FvG)&Max(G)) & Pos(Max(FvG)&Max(F))]êw

Men A7 er et aksiom i M++;u og derfor med i enhver maksimalt konsistent mengde. Fra dette og (10) kan man derfor slutte at Ekv(G,H)êw. Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (8) holder. Når det gjelder kondisjonalen mot venstre Følger fra det at Ekv(G,H)êw og det forhold at A7 er et aksiom i at

(11) [Pos(Max(FvG)&Max(G)) & Pos(Max(FvG)&Max(F))]êw

Dette i sin tur impliserer at det finnes verdener w;1 og w;2 slik at

Max(GvH)&Max(H)êw;1 & Max(GvH)& Max(G)êw;2 Fra dette kan man så ved hjelp av definisjonen av c;0 slutte

c;0(Sm(GvH))Ωc;0(Sm(H))≠ø & c;0(Sm(GvH))Ωc;0(Sm(G))≠ø

og derfor at True(Ekv(G,H),L;m,w,M;0).

Dette avslutter vårt bevis for hjelpesetningen. .

Som nevnt ovenfor må det også bevises at modellen M;0 =<<X;0,Q;0,c;0>,V;0> oppfyller kravet C1. Anta derfor at FêFm(L;p) & Mg(w: True(F,L;p,w,M;0))≠ø.

Fra dette og hjelpesetningen som vi nettopp har bevis følger at Fêw for en eller annen wêX;0.

Dette impliserer at Pos(F)êw' for en eller annen verden w'. Siden A5 er et aksiom i M++;u følger at A5êw'. Fra dette og det som tidligere har blitt bevist om maksimalt konsistente mengder følger Pos(Max(F))êw'. Dette i sin tur impliserer at w'êSm(Max(F)) = c;0(Sm(F)). Herav c;0(Sm(F))≠ø. Det er imidlertid åpenbart at Sm(F)êC;0. Men Q;0 = Mg(a: aêC;0 & c;0(a)≠ø). Det følger derfor at
Mg(w: True(F,L;p,w,M;0)) = Sm(F) êQ;0. Dette viser at modellen oppfyller kravet C1.

Vi har nå vist at hvis Δ er en eller annen M++;u-konsistent mengde finnes det en P-modell M:0 = <<X;0,Q;0,c;0>,V;0> og en verden w;0êX;0 slik at for enhver formel F som er med i Δ har man at True(F,L;p,w;0,M;0). Fra dette følger så fullstendighetsdelen i teoremet ovenfor. **Q.E.D**

Vi har ovenfor vist at M++;u er komplett med hensyn på klassen av P-modeller for L;p som oppfyller kravet C1. Dette var som nevnt det følgende krav:

(AF)(FêFm(L;p) –> Mg(w: True(F,L;p,w,M))≠ø –> Mg(w: True(F,L;p,w,M))êQ

På den annen side har vi også avgrenset en annen klasse av modeller for L;p nemlig modellklassen M++;uPref;0. Vi vil nå vise at disse to modellklassene definerer den samme mengden av gyldige formler i L;p. I lys av fullstendighets-teoremet som vi nettopp har vist vil vi da også ha et fullstendighetsresultat for M++;u som sier at en formel er et teorem i dette systemet hvis og bare hvis formelen er gyldig i alle M++;uPref;0-modeller. Mao. vi vil ha gitt et bevis for Teorem 5.1.2

Vi tar sikte på å bevise den følgende sats:

Teorem 5.1.4: Anta FêFm(L;p). Da gjelder: Val(P+,F) <–> Val(M++;uPref;0, F).

Bevis: Vi skal først vise kondisjonalen mot venstre. Anta derfor at Val(M++;uPref;0, F) for en eller annen vilkårlig formel F. La M= <<X,Q,c>,V> være en vilkårlig P+-modell for L;p. Da har man at (1) <X,Q,c> er en M-utvalgsstruktur. Fra dette og Hanssons teorem følger det at de finnes en preferanserelasjon R over X, ie som er slik at Dom(R)=X og som er slik at:

(2) (Aa)(aêQ –> Max(R,a) = c(a)) (Se i denne forbindelse Teorem 1.1 i §1)

Vi definerer nå en ny modell M;2 ved å sette: M;2= <X,R,V>. Ser man på definisjonen av en preferanseteoretisk modell for L;p er da M;2 tydeligvis en slik modell. Siden F er gyldig i M++;uPref;0-modellene har vi at True(F,L;p,w,M;2) for alle wêX. Det som nå vil bli bevist er at hvis w er et vilkårlig element i X, ie. wêX, og F er en vilkårlig formel i L;p holder:

(3) True(F,L;p,w,M) <–> True(F,L;p,w,M;2)

Dette innebærer at at F også vil være sann i alle wêX i M. Siden M var en vilkårlig P+ -modell følger da at Val(P+,F). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise (3).

Vi beviser (3) ved induksjon på lengden av formler i L;p. Satsen holder åpenbart om F=pk for et eller annet naturlig tall k. Det er også lett å se på basis av definisjonene av "True" i en P-modell og M++;uPref;0-modell at den også holder om F= ¬G, GvH, G&H, G–>H, G<–>H. Likeledes er satsen lett å bevise i tilfelle F = Pos(G) eller Nec(G). Det er derfor bare nødvendig å vise at (3) holder om F= Max(G), Pr(G,H) og Ekv(G,H).

Anta F=Max(G) for en eller annen formel G i L;p. Da har vi:

(4) True(Max(G),L;p,w,M) <–>wêc(Mg(w: True(G,L;m,w,M))) &
(Mg(w: True(G,L;m,w,M))êQ

Nå har man i lys av induksjonshypotesen at:

(5) Mg(w: True(G,L;m,w,M) = Mg(w: True(G,L;m,w,M;2)

Fra (2), (4) og (5) følger i lys av det forhold at M oppfyller kravet C1:

(6) True(Max(G),L;p,w,M) <–>wêMax(R, Mg(w: True(G,L;m,w,M;2)))

Men dette innebærer at True(Max(G),L;p,w,M) <–> True(Max(G),L;p,w,M;2).
Dette viser at (3) holder i det tilfelle at F= Max(G).

Anta F = Pr(G,H). Da har vi fra definisjonen av sannhet i en P-modell om man setter Sm(G) = Mg(w: True(G,L;m,w,M)):

True(Pr(G,H),L;p,w,M) <–> Sm(G)≠ø & Sm(H)≠ø &
c(Sm(GvH))Ωc(Sm(H))=ø

I lys av induksjonshypotesen har man:

Sm(G) = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) = Mg(w: True(G,L;m,w,M;2))
Sm(H) = Mg(w: True(H,L;m,w,M)) = Mg(w: True(H,L;m,w,M;2))

Siden M oppfyller kravet C1 har man at Sm(G),Sm(H),Sm(GvH)êQ. Fra (2) har vi derfor:

True(Pr(G,H),L;p,w,M) <–> Mg(w: True(G,L;m,w,M;2))≠ø &
Mg(w: True(H,L;m,w,M;2))≠ø &
Max(R, Mg(w: True(GvH,L;m,w,M;2))) ΩMax(R,Mg(w: True(H,L;m,w,M;2))) =ø

Man viser imidlertid lett at høre side her er ekvivalent med:

(Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) &x;2êMax(R,q2) & x;1R*x;2)

I denne forbindelse kan man med fordel studere beviset for Teorem 5.1. Men siden dette er ekvivalent med True(Pr(G,H),L;p,w,M;2) holder satsen også i dette tilfellet.

Det gjenstår å studere det tilfelle at F=Ekv(G,H). Da har vi fra definisjonen av sannhet i en P-modell om man setter Sm(G) = Mg(w: True(G,L;m,w,M)):

True(Ekv(G,H),L;p,w,M) <–> c(Sm(GvH))Ωc(Sm(G))≠ø &
c(Sm(GvH))Ωc(Sm(H))≠ø

I lys av induksjonshypotesen har man:

Sm(G) = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) = Mg(w: True(G,L;m,w,M;2))
Sm(H) = Mg(w: True(H,L;m,w,M)) = Mg(w: True(H,L;m,w,M;2))

Siden M oppfyller kravet C1 har man at Sm(G),Sm(H),Sm(GvH)êQ. Fra (2) har vi derfor:

True(Pr(G,H),L;p,w,M) <–>
Max(R, Mg(w: True(GvH,L;m,w,M;2))) Ω
Max(R,Mg(w: True(G,L;m,w,M;2))) ≠ø&
Max(R, Mg(w: True(GvH,L;m,w,M;2))) Ω
Max(R,Mg(w: True(H,L;m,w,M;2))) ≠ø

Man viser imidlertid lett at høre side her er ekvivalent med:

(Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1≈;Rx;2)

Igjen kan man studere beviset for Teorem 5.1 i §5. Men siden dette er ekvivalent med True(Ekv(G,H),L;p,w,M;2) holder (3) også i dette tilfellet. Vi har nå vist at (3) holder.

Vi har nå bevist kondisjonalen mot venstre i teoremet. La oss nå ta for oss kondisjonalen mot høyre. Anta derfor at Val(P+,F) for en vilkårlig formel i L;p. Vi må da vise at F kommer ut som sann i enhver verden i enhver preferanseteoretisk modell for L;p. Anta derfor at (1) M= <X,R,V>ê M++;uPref;0. Vi konstruerer da en P+-modell M;2 ved å sette M;2= <<X,Q,c>,V> der Q og c er definert ved:

Q = Mg(a: (EF)(FêFm(L;p) & a=Mg(w: True(F,L;p,w,M))))
c = Mg(<a, Max(R,a)>: aêQ)

Hvis vi nå kan vise at:

(2) (Aw)(wêX –> (True(F,L;p,w,M;2) <–> True(F,L;p,w,M;2)))
vil vi ha bevist satsen.

Det er temmelig likefrem å vise at <X,Q,c> definert på denne måten oppfyller kravene til en M-utvalgsstruktur. Vi overlater denne delen av beviset til leseren. At modellen M;2 også oppfyller kravet C1 følger også lett om man viser at (2) holder. Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise (2).

(2) bevises ved induksjon på lengden av formler i L;p. Det skulle være klart at den holder om F en setningsbokstav i L;p. Det skulle også være lett å se at den holder om F= ¬G, GvH, G&H, G–>H, G<–>H. Likeledes er satsen lett å bevise i tilfelle F = Pos(G) eller Nec(G). Det er derfor bare nødvendig å vise at (3) holder om F= Max(G), Pr(G,H) og Ekv(G,H).

Anta F=Max(G) for en eller annen formel G i L;p. Da har vi:

(3) True(Max(G),L;p,w,M) <–> wêMax(R, Mg(w: True(G,L;m,w,M)))

Nå har man i lys av induksjonshypotesen at:

(5) Mg(w: True(G,L;m,w,M) = Mg(w: True(G,L;m,w,M;2). Fra høyre side i (3) følger at Mg(w: True(G,L;m,w,M))≠ø. Siden M er en M++;uPref;0-modell følger da at Mg(w: True(G,L;m,w,M))êQ. Men fra definisjonen av c har vi at:

c(Mg(w: True(G,L;m,w,M))) = Max(R, Mg(w: True(G,L;m,w,M)))

Det følger derfor at:

wêMax(R, Mg(w: True(G,L;m,w,M))) <–>
wêc(Mg(w: True(G,L;m,w,M))) & Mg(w: True(G,L;m,w,M))êQ

Men her er høyre side ekvivalent med True(F,L;p,w,M;2). (2) holder derfor i dette tilfellet.

Anta F= Pr(G,H). Da har vi om man setter
q1 = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) og q2 = Mg(w: True(H,L;m,w,M)) at:

(6) True(Pr(G,H),L;p,w,M) <–> (Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1R*x;2)

Setter vi Sm(G) = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) og Sm(H) = Mg(w: True(H,L;m,w,M)) og tar i betraktning definisjonen av c er det ikke spesielt vanskelig å se at høyre side i (6) er ekvivalent med høyre side i den følgende formel.

(7) True(Pr(G,H),L;p,w,M) <–> Sm(G)≠ø & Sm(H)≠ø & c(Sm(GvH))Ωc(Sm(H))=ø

Dette innebærer at (2) også holder om F = Pr(G,H).

Anta F= Ekv(G,H). Da har vi om man setter
q1 = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) og q2 = Mg(w: True(H,L;m,w,M)) at:

(8) True(Ekv(G,H),L;p,w,M) <–> (Ex;1)(Ex;2)(x;1êMax(R,q1) & x;2êMax(R,q2) & x;1≈;r x;2)

Setter vi
Sm(G) = Mg(w: True(G,L;m,w,M)) og
Sm(H) = Mg(w: True(H,L;m,w,M))
og tar i betraktning definisjonen av c er det ikke spesielt vanskelig å se at høyre side i (6) er ekvivalent med høyre side i den følgende formel.

(9) True(Ekv(G,H),L;p,w,M) <–> c(Sm(GvH))Ωc(Sm(G))≠ø & c(Sm(GvH))Ωc(Sm(H))≠ø

Dette innebærer at (2) også holder om F = Ekv(G,H).

Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Etter at vi nå har bevist fullstendigheten til M++;u er det mulig å gi et bevis for en sats som vi

tidligere nevnte. Det dreier seg om denne:

Teorem 5.1.5 (AF)(FêFm(L;p) –> [Th;(M++;u)(F) <–> Th;(M++)(J;0(F))])

Bevis: Man beviser her forholdsvis lett kondisjonalen mot høyre ved et induksjonsbevis på klassen av teoremer i M++. Denne delen av teoremet overlates som en øvelse til leseren. Anta på den annen side at Th;(M++)(J;0(F)). I lys av fullstendighetsteoremet for M++ , Teorem 4.2.4 har man da
Val(M++Pref;0,J;0(F)). Fra dette og Teorem 5.1.1 kan man så slutte at
Val(M++;uPref;0,F). Men fra dette og Teorem 5.1.2 ovenfor følger Th;(M++;u)(F). **Q.E.D.**

§5.2 Systemet P0-Det

Hvis man sløyfer konstruksjonen Max i språket L;p får man språket til kalkylene P0 og P0-Det. Disse ble behandlet i Rognes [8], Kp I, Del B,C. Dette reduserte språket vil vi betegne med L;p -. Vi tar nå sikte på å bevise det følgende teorem:

Teorem 5.2.1 Er F en formel i L;p- gjelder: Th;P0-Det(F) –> Th;M++;u(F).

I Rognes [8] ble det definert modellklasser som modellerte systemene P0,P1,P2 og systemene P0-Det, P1-Det og P2-Det. Det skulle være klart om man lesere Rognes [8] at en P0-Det modell er det samme som en M++;uPref;0-modell, men med valuasjonsregelen for Max-konstruksjonen sløyfet. Klassen av P0-Det-modeller betegner vi med uttrykket "ModP0-Det". Er MêModP0-Det har vi at M=<X,R,V> der X≠ø, R en preferanserelasjon over X og V: Var(L;p-) –> Pt(X). Videre har man at M oppfyller kravet:

(H) (AF)(FêFm(L;p-) –> Mg(w: True(F,L;p-,w,M)≠ø –>
Max(R, Mg(w: True(F,L;p-,w,M))≠ø)

Ellers er valuasjonsreglene for sannhet i en modell de samme dom for modeller i klassen M++;uPref;0 bortsett fra – noe vi nevnte – valuasjonsregelen for Max-operatoren er sløyfet.

I Rognes [8] beviste vi:

Teorem 5.2.2 Er F en formel i L;p- gjelder:
Th;P0-Det(F) <–> Val(ModP0-Det,F).

Vi skal bevise Teorem 5.2.1 ovenfor ved hjelp av dette resultatet og Teorem 5.1.2 i forrige paragraf. Vi trenger dog visse hjelpesetninger:

Lemma 5.2.1 Er MêM++;uPref;0 & FêFm(L;p) & M=<X,R,V> & wêX gjelder:
True(F,L;p-,w,M) <–> True(F,L;p,w,M).

Bevis: Dette bevises ved et nærmest trivielt induksjonsbevis på lengden av formler i L;p-. Dette overlates til leseren. **Q.E.D.**

Lemma 5.2.2 Er MêM++;uPref;0 så er MêModP0-Det.

Bevis: I lys av de forklaringene som allerede har blitt gitt behøver vi bare å vise at hvis MêM++;uPref;0 oppfyller M kravet H. Anta derfor FêFm(L;p-) og at Mg(w: True(F,L;p-,w,M)≠ø Fra Lemma 5.2.1 følger da:

Mg(w: True(F,L;p-,w,M) = Mg(w: True(F,L;p,w,M)

og derfor at Mg(w: True(F,L;p,w,M)≠ø. Siden M oppfyller følgende krav i lys av definisjonen av M++;uPref;0 som ble gitt i §5.1:

Er FêFm(L;p) & Mg(w: True(F,L;p,w,M))≠ø –>
Max(R, Mg(w: True(F,L;p,w,M)))≠ø

Har vi åpenbart: Max(R, Mg(w: True(F,L;p,w,M)))≠ø. **Q.E.D.**

Fra Lemma 5.2.1 og Lemma 5.2.2 følger så :

Teorem 5.2.3 (AF)(FêFm(L;p-) –>. Val(ModP0-Det,F) –> Val(M++;uPref;0,F)

Fra dette teoremet og Teorem 5.2.2 og Teorem 5.1.2 følger så Teorem 5.2.1 som dermed kan anses som bevist.

Teorem 5.2.1 sier at systemet P0-Det er inkludert i systemet M++;u. Man kan spørre om M++;u er en konservativ utvidelse av P0-Det. Uttrykt på en litt annen måte kan man spørre om den følgende påstand holder:

(AF)(FêFm(L;p-) –> (Th;P0-Det(F) <–> Th;M++;u(F))

Vi vet ennå ikke om dette er tilfelle. Satsen ville holde om man kunne bevise det omvendte av Lemma 5.2.2 . Vi har imidlertid ikke noe bevis å tilby som viser at dette er tilfelle. Snarere synes det å være slik at det finnes modeller i klassen ModP0-Det som ikke er med i klassen M++;uPref;0. Dette utelukker likevel ikke at M++;u kan være en konservativ utvidelse av P0-Det. Dette holder om man for hver P0-Det-modell M kan konstruere en M++;uPref;0-modell M* som verifiserer de samme formlene i L;p- som M. Imidlertid må vi akkurat ved det nåværende tidspunkt tilstå vår uvitenhet om hvordan en slik konstruksjon kan utføres og om den i det hele tatt er mulig.

§6 Preordninger

En preferanserelasjon er en transitiv og refleksiv relasjon R over et domene X som også oppfyller det krav at dersom x,y er to elementer i X så har man xRy eller yRx. Dette siste kravet innebærer at alle elementene i X er sammenlignbare med hensyn på relasjonen R. Dette er i en viss forstand et ganske sterkt krav. Tenker man seg at R f.eks. er relasjonen minst like bra som over mengden av mulige verdener er det ikke opplagt at alle mulige verdener er sammenlignbare med hensyn på denne relasjonen. Det er ikke utenkelig at det kan finnes mulige verdener w;1 og w;2 der man hverken har at w;1 er minst like bra som w;2 eller har at w;2 er minst like bra som w;1. Det kan derfor være av interesse å se på den svakere teorien man får når man bare studerer relasjoner som er refleksive og transitive over domenet X. Slike relasjoner skal her kalles for preordninger. Vi gir den følgende helt formelle definisjon:

PO(R,X) <–>. Dom(R) = X≠ø &
(Ax)(Ay)(Az)(x,y.zêX & xRy & yRz –> xRz)& (Ax)(xêX –> xRx)

Vi minner om at når vi skriver Dom(R)=X for en eller annen relasjon R innebærer dette at unionen av det høyre og venstre domenet til R er identisk med X. Det høyre domenet til en relasjon R er Mg(x: (Ey)(xRy)). Det venstre domenet til R er Mg(y: (Ex)(xRy)). Er R en relasjon over domenet X, ie. er Dom(R)= X, og er a en delmengde av X betegner vi de R-maksimale elementene i a med "Max(R,a)". Vi minner om at dette uttrykket er definert slik:

Max(R,a) = Mg(x: xêa & (Ay)(yêa –> xRy))

Fra dette fremgår det at de R-maksimale elementene i a er nøyaktig de elementene i a som er bærer relasjonen R til ethvert element i a, dvs. er minst like bra som alle elementer i a om R oppfattes som en "minst-like-bra-som" relasjon.

Vi skal først gi bevis for det følgende lemma:

Lemma 6.1 (a) PO(R,X) & a Inkl X & x;1,x;2êMax(R,a) –> (x;1Rx;2 & x;2Rx;1)
(b) PO(R,X) & a Inkl X & x;1êMax(R,a) & x;2êa –> x;1Rx;2
(c) PO(R,X) & a Inkl X & x;1êMax(R,a) & x;2ê(a–Max(R,a)) –>. x;1Rx;2 & ¬(x;2Rx;1)
(d) PO(R,X) & a Inkl X & x:1êMax(R,a) & x;2êa & x;2Rx;1 –> x;2êMax(R,a)

Bevis: Ad (a). Fra den tredje forutsetningen følger:
x;1êa & (Ay)(yêa –> x;1Ry) & x;2êa & (Ay)(yêa –> x;2Ry). Fra den første og siste konjunkten her følger x;2Rx;1. Fra den andre og tredje følger x;1Rx;2. Dette viser at påstanden holder.

Ad (b). Fra den tredje forutsetningen følger: x;1êa & (Ay)(yêa –> x;1Ry). Fra dette og den fjerde forutsetningen følger åpenbart x;1Rx;2.

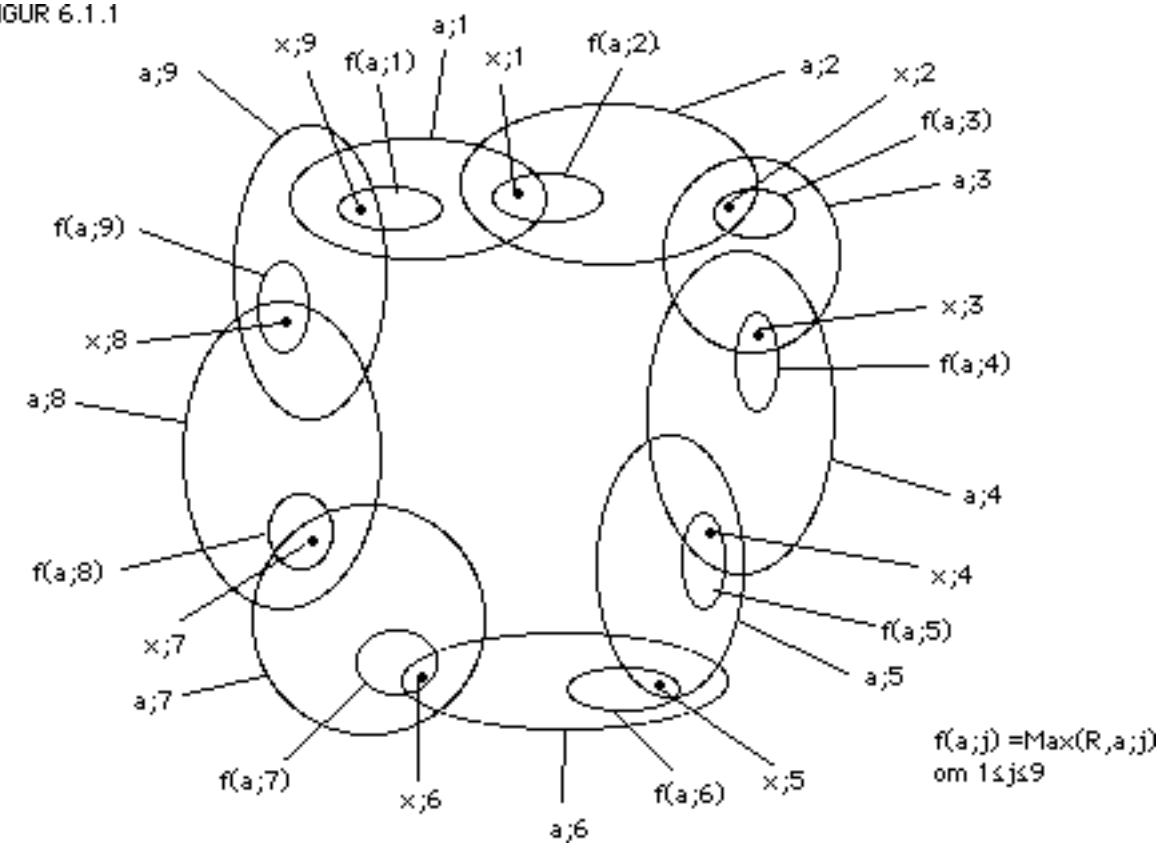
Ad (c). Fra den tredje forutsetningen i (c) følger:
(1) x;1êa & (Ay)(yêa –> x;1Ry). Fra den fjerde forutsetningen i (c) følger x;2êa. Herav har man x;1Rx;2. Anta for reduktio ad absurdum at (2) x;2Rx;1. La z være et vilkårlig element i a. Da har har vi i lys av (1) at x;1Rz. Fra dette og (2) følger x;2Rz siden R er transitiv. Det følger derfor at x;2êa & (Az)(zêa –> x;2Rz). Men dette innebærer at x;2êMax(R,a). Det strider imidlertid mot den fjerde forutsetningen i (c). Dette viser at (c) holder.

Ad (d). Fra den tredje forutsetningen følger x;1êa & (Ay)(yêa –> x;1Ry). Fra dette og de to siste forutsetningene i (d) følger x;2êa & (Ay)(yêa –> x;2Ry) siden R er transitiv. Men fra dette og definisjonen av "Max(R,a)" følger x;2êMax(R,a). **Q.E.D.**

Vi skal nå bevise et teorem som er noe mer substansielt, nemlig den følgende sats:

Teorem 6.1 Anta PO(R,X) & a;1,....,a;nêX der n≥1. Anta videre at:
Konj/j,1,n-1/(a;jΩMax(R,a(j+1))≠ø) & a;nΩ Max(R,a;1)≠ø
Da gjelder:
(a) (Ak)(1≤k≤n-1 –> Max(R,a;k)Ωa;(k+1) = a;kΩ Max(R,a;(k+1)))
(b) Max((R,a;1)Ωa;n = a;1ΩMax(R,a;n)

FIGUR 6.1.1



Bevis: Anta (1) PO(R,X) & a;1,...,a;n Inkl X der n≥1. Anta enn mer at
(2) SN/j,1,n-1/(a;jΩMax(R,a(j+1))≠ø & a;nΩ Max(R,a;1)≠ø. Fra (2) følger eksistensen av x;1,....,x;nêX (n≥1) der man har:

(3) x;jê(a;jΩMax(R,a;(j+1))) for j=1,...,n-1

(4) x;nê(a;nΩMax(R,a;1)))

Anta nå at jê{1,...,n-1}. Da har man om 1≤j<(n-1) i lys av (3) at:

(5) x;jê(a;jΩMax(R,a;(j+1)))

(6) x;(j+1)ê(a;(j+1)ΩMax(R,a;(j+2)))

Fra (5) og (6) og Lemma 6.1,b følger x;jRx;(j+1) for jê{1,...,n-2}. Anta j=(n-1). Da har vi x;(n-1)ê(a;(n-1)ΩMax(R,a;n)) og dessuten at x;nê(a;nΩMax(R,a;1). Det følger da igjen ved hjelp av Lemma 6.1,b at x;(n-1)Rx;n. Nå har man også at x;nêMax(R,a;1) ved hjelp av (4). Dessuten følger fra (3) at x;1êa1. Dette innebærer i lys av Lemma 6.1,b at x;nRx1. Vi har altså vist at følgende holder:

(7) x;1Rx;2Rx;3.....x;(n-1)Rx;nRx;1.

Det følger at hvis x;j,x;kê{x;1,...,x;n} så har man x;jRx;kRx;j i lys av det forhold at PO(R,X) og R derfor er transitiv.

(a) Anta nå k er et vilkårlig element i {1,...,n-1}. Vi ønsker da å bevise:

(8) Max(R,a;k)Ωa;(k+1) = a;kΩMax(R,a;(k+1)).

(i) Inklusjonen mot høyre: Anta z er et vilkårlig element der zêMax(R,a;k)Ωa;(k+1). Da har man i lys av definisjonen av "Max(R,a)" at

(9) zêa;k. Vi må imidlertid vise at zêMax(R,a;(k+1)). Vi sondrer mellom to tilfelle:

Tilfelle 1: k=1. Da har man x;nêMax(R,a;1)=Max(R,a;k). Siden zêMax(R,a;k) følger da x;nRzRx;n. Videre har vi i dette tilfellet at x;1êa;1ΩMax(R,a;2) = a;kΩMax(R,a;(k+1)) (Jmf. (3) ovenfor). Herav følger da x;1êMax(R,a;(k+1)). Nå har man i lys av (7) at x;nRx;1.

Derfor zRx;1. Videre har vi zêa;(k+1). Ved hjelp av Lemma 6.1,d følger da: zêMax(R,a;(k+1)).

Tilfelle 2: kê{2,...,n-1}. Da har vi x;(k-1)êMax(R,a;k) & x;kêMax(R,a;(k+1)). Siden zêMax(R,a;k) følger zRx;(k-1). Videre har man i lys av (7) x;(k-1)Rx;k og derfor zRx;k & x;kêMax(R,a;(k+1)) & zêa;(k+1). I lys av Lemma 6.1,d følger da zêMax(R, a;k+1).

(ii) Inklusjonen mot venstre: Anta zê(a;kΩMax(R,a;(k+1)). Da er zêa;(k+1). Vi behøver derfor bare å vise at zêMax(R,a;k). Tilfelle 1: k=1. Da er x;nêMax(R,a;k) og x;1êMax(R,a;(k+1)). Siden zêMax(R,a;(k+1)) følger zRx;1 og i lys av (7) har man x;1Rx;n. Da zêa;k& zRx;nêMax(R,a;k). Det følger at zêMax(R,a;k). Tilfelle 2: kê{2,...,n-1}. Da har man i lys av (3) og (4) at x;kêMax(R,a;(k+1)) & x;(k-1)êMax(R,a;k). Vi må, i lys av (7), ha x;kRx;(k-1) og siden zêMax(R,a;(k+1))Ωa;k at zRx;kRx;(k-1). Det følger at zêMax(R,a;k).

Dette viser at inklusjonen mot venstre holder og avslutter beviset for punkt (a) i teoremet.

(b) Vi må vise: (9) Max(R,a;1)Ω a;n = a;1ΩMax(R,a;n)

Anta zêMax(R,a;1)Ω a;n. Da er zêa;1. Vi har

x;nêMax(R,a;1) og x;(n-1)êMax(R,a;n)

Videre har vi i lys av (7) og transitiviteten til R at x;nRx;(n-1). Det følger da siden zêMax(R,a;1), at zRx;(n-1). Da zRx;(n-1). Ved hjelp av Lemma 6.1 kan man da slutte zêMax(R,a;n).

Er på den annen side z et vilkårlig element der zêa;1ΩMax(R,a;n) har vi zêa;n og siden x;(n-1)êMax(R,a;n) & x;nêMax(R,a;1) følger zRx;(n-1)Rx;n. Da zRx;n & zêa;1. Det følger i så fall ved hjelp av Lemma 6.1 at zêMax(R,a;1). Dette viser at (9) holder. **Q.E.D.**

Vi skal bevise det følgende lemma som viser hvordan en preordning over en mengde X kan utstrekkes til en preordning over et mer omfattende område Y som inkluderer X.

Lemma 6.2 Anta PO(R,X) & M(Y) & Y≠ø & XΩY=ø. Definer videre R;1 ved:

R;1 = R U Mg(<x,y>: xêX & yêY} U Mg(<y,y>: yêY)

Da gjelder:

PO(R;1,XUY) & (Az)(Ax)(xêX & zêY –> ¬(zR;1x))

Bevis: Vi må vise at (1) Dom(R;1)=XUY. Anta xêDom(R;1). Da finnes y slik at <y,x>êR;1 v <x,y>êR;1. La oss først se på det tilfelle at <y,x>êR;1. Da har man enten <y,x>êR og da xêX, eller så har man <y,x>êR;1–R. da har man enten yêX&xêY. I så fall er xêXUY. Eller så er <y,x>êMg(<y,y>: yêY). Da følger y=xêY Inkl XUY. På tilsvarende måte innser man at xêXUY om <x,y>êR;1. Er på den annen side xêXUY har man <x,x>êR;1 og derfor at xêDom(R;1). Dette viser at (i) holder. Det er nødvendig å vise at R er transitiv. Anta derfor for vilkårlige x,y,z at (1) x,y,zêXUY & xR;1y & yR;1z. Vi har da (<x,y>êR v <x,y>ê(R;1–R)) & (<y,z>êR v <y,z>ê(R;1–R)). Vi skiller mellom fire undertilfelle: (i) Anta <x,y>êR & <y,z>êR. Siden PO(R,X) følger at R er transitiv og derfor at <x,z>êR Inkl R;1. (ii) Anta <x,y>êR & <y,z>ê(R;1–R). Da har vi enten yêX & zêY eller y=zêY. Siden <x,y>êR følger xêX. Derfor xêX &zêY. Dette impliserer at <x,z>êR;1. (iii) <x,y>ê(R;1–R) & <y,z>êR. Da følger y,zêX &((xêX&yêY) v x=yêY). Begge tilfellene leder til en motsigelse. Dette tilfellet er derfor utelukket. (iv) Anta <x,y>ê(R;1–R) & <y,z>ê(R;1–R). Da har vi:

((xêX&yêY) v x=yêY) & ((yêX&zêY) v y=zêY) Her blir det igjen fire tilfelle å studere. Man ser lett at i det første har man xêX&zêY og derfor <x,z>êR;1. Det samme gjelder det andre tilfellet. I det tredje tilfellet har man x=yêY & (yêX&zêY). Dette innebærer

at yêXΩY som er umulig. I det fjerde tilfellet har man x=yêY & y=zêY. Dette impliserer x=zêY og derfor at <x,z>êR;1.

Dette viser at relasjonen R;1 er transitiv. At R;1 er refleksiv er temmelig opplagt. Anta det finnes x,z slik at (2) xêX &zêY & zR;1x. Da må man ha at <z,x>ê(R;1–R) og derfor at (zêX&xêY) v z=xêY. Men begge disse tilfellene strider mot (2). Det følger at (Az)(Ax)(xêX &zêY –> ¬(zR;1x)). Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Vi ønsker nå å studere sammenhengen mellom preordninger over et område X og det som vi tidligere har kalt M-utvalgsstrukturer. Vi skal først gi en definisjon av M-utvalgsstruktur og dernest vise at hvis man har for seg en M-utvalgsstruktur så vil det alltid finnes en underliggende preordning. Dette følger forsåvidt fra Teorem 1.1 siden enhver preferanserelasjon over et område X også er en preordning over dette området,

Den definisjonen vi nå gir av M-utvalgsstruktur er ekvivalent med den som ble gitt i §1, men er formulert på en litt annen måte:

Definisjon 6.1 <V,f> er en M-utvalgsstruktur over området E , Ch(<V,f>,E), hvis og bare hvis følgende krav er oppfylt:

(i) E er en ikke-tom mengde.
(ii) V Inkl Pt(E) & E= UV
(iii) Func(f) & Dom(f)=V & Rgn(f) Inkl V
(iv) (Ax)(xêV –> f(x) Inkl x)
(v) (Ax)(xêV –> f(x)≠ø)
(vi) (Ax;1)...(Ax:n)(x;1,...,x;nêV &
Konj/j,1,n-1/(x;jΩf(x;(j+1))≠ø) & x;nΩf(x;1)≠ø –>
(Aj)(jê{1,...,n-1} –> f(x;j)Ωx;(j+1) = x;jΩf(x;(j+1))) (n≥1)

Man ser fra denne definisjonen at dersom <V,f> er en M-utvalgsstruktur over E så er <E,V,f> en M-utvalgsstruktur. Det omvendte holder også: Er <E,V,f> en M-utvalgsstruktur er <V,f> en M-utvalgsstruktur over E.

Vi ønsker nå å gi et bevis for det følgende teorem:

Teorem 6.2 Anta Ch(<V,f>,E). Da finnes det en preordning R over E hvor man har at (Aa)(aêV –> f(a) = Max(R,a)). Dette kan også uttrykkes slik:
(ER)(PO(R,E) & (Aa)(aêV –> f(a) = Max(R,a)))

Bevis: Anta Ch(<V,f>,E). Definer R på den følgende måte:

(1) xRy <–> (EA;1)....(EA;n)(A;1,....,A;nêV &
Konj/j,1,n-1/(A;jΩf(A;(j+1))≠ø) & xêf(A;1) & yêA;n & x,yêE)

Vi definerer så mengden E' slik:

(2) E' = Mg(x: (EA)(AêV & xêf(A)).

Det er ikke opplagt at E' = E. Men det skulle være klart at E' Inkl E. La oss nå først vise at R er transitiv: Anta for vilkårlige x,y,zêE at xRy & yRz. Ved hjelp av definisjonen (1) følger da at det finnes A;1,...,A;n og B;1,...,B;m (n,m≥1) slik at:

(3) A;1,....,A;nêV &
Konj/j,1,n-1/(A;jΩf(A;(j+1))≠ø) & xêf(A;1) & yêA;n & x,yêE
(4) B;1,....,B;nêV &
Konj/j,1,m-1/(B;jΩf(B;(j+1))≠ø) & yêf(B;1) & zêB;m & y,zêE

Sett nå per definisjon C;k = A;k for k=1,...,n og sett C;n+j= B;j for j=1,...,m. Da har vi at

følgende er tilfelle:

(5) C;1= A;1 & C;(n+m)=B;m

(6) xêC;1 & zêC;(n+m)

(7) (Aj)(1≤j≤ ((n+m)-1) –> C;jΩf(C;(j+1))≠ø)

Fra (5) –(7) og definisjonen av R følger xRz.[5] Dette viser at R er transitiv over E. Men det følger da at den også må være transitiv over den potensielt snevrere mengden E'. Vi har derfor at Rest(R,E')[6] også er transitiv.

Anta nå xêE'. Da finnes i lys av definisjonen av E' en mengde A slik at AêV &xêf(A). Det følger da at f(A) Inkl A og derfor at xêA. Vi har derfor at xêA &xêf(A). Fra dette og definisjonen av R følger, i det man i denne definisjonen setter n=1, at xRx. Vi har derfor at Rest(R,E') er refleksiv. Det som så langt har blitt bevist er at PO(Rest(R,E'),E').

Vi definerer nå relasjonen R* slik: Er E'=E setter vi R*= Rest(R,E').
Er E' SInkl E setter vi

R* = Rest(R,E')UMg(<x,y>: xêE'& yê(E–E'))U Mg(<y,y>: yê(E–E'))

I lys av Lemma 6.2 har man da at uansett om E' er strengt inkludert i E eller identisk med E så har man at PO(R*,E).

Det som nå må bevises er at

(+) (Aa)(aêV –> f(a) = Max(R*,a))

Anta derfor for vilkårlig a at aêV.

(i) La oss først godtgjøre:

f(a) Inkl Max(R*,a)= Mg(x: xêa & (Ay)(yêa –> xR*y))

Anta derfor xêf(a) for vilkårlig x og anta yêa for vilkårlig y. Vi har da xêf(a)&yêa. Etter definisjonen av R har man da xRy. Videre har vi xêE'. Er nå yêE' har vi xRest(R,E')y og i så fall xR*y. Er ¬(yêE') har vi xêE'& yê(E–E') og da må vi også ha xR*y. I alle tilfelle må vi ha xR*y. Dette viser at:

f(a) Inkl Max(R*,a)

(ii) La oss nå vise at Max(R*.a) Inkl f(a), mao. la oss gi et bevis for:

(1) (Ax)(xêa &(Ay)(yêa –> xR*y). –> xêf(a)). Det vil åpenbart være tilstrekkelig å bevise det omvendte av dette nemlig:

(2) (Ax)(¬(xêf(a)) &xêa –> (Ey)(yêa & ¬(xR*y)))

Anta derfor for vilkårlig x at (2.1) ¬(xêf(a)) &xêa. Siden aêV har vi f(a)≠ø & f(a) Inkl a. Det følger at det finnes noe z slik at (3) zêf(a) og (4) zêa. Anta nå for reduktio ad absurdum at (5) xR*z. Siden zêf(a) og aêV har vi zêE'. Siden xR*z har vi <x,z>êR* og derfor i lys av definisjonen av R* at enten <x,z>êRest(R,E'). I så fall har vi xêE'. Eller så har vi <x,z>êMg(<x,y>: xêE' & yê(E-E'). Da følger zê(E-E') som strider mot at z skal være med i E'. Dette tilfellet er derfor utelukket. Eller så har vi <x,z>ê Mg(<y,y>: yê(E–E') som igjen impliserer det umulige at zê(E–E'). Det følger fra dette at <x,z>êRest(R,E') og derfor at xRz. Fra definisjonen av R følger da eksistensen av A;1,...,A;n slik at:

(5) xêf(A;1) & zêA;n

(6) (Aj)(jê{1,...,n-1} –> A;jΩf(A;(j+1))≠ø)

Nå har vi zêf(a) & xêa. Setter vi per definisjon A;(n+1)=a har man da at:

---

[5] For å se litt lettere at dette holder kan man notere at (3) innebærer følgende:
(i) A;1Ωf(A;(2))≠ø &.... & A;(n-1)Ωf(A;n)≠ø & xêf(A;1) & yêA;n
Tilsvarende har man at (4) innebærer at:
(ii) B;1Ωf(B;(2))≠ø &.... & B;(m-1)Ωf(B;m)≠ø & yêf(B;1) & yêB;m
I lys av definisjonen av C, (i) og (ii) har man så.
C;1Ωf(C;2)≠ø & .....& C;(n-1)Ωf(C;n)≠ø & xêf(C;1) & yêC;n&C;(n+1)Ωf(C;(n+2))≠ø & C;(n+m-1)Ωf(C;(n+m))≠ø & yêf(C;(n+1))& zêC;(n+m)

[6] "Rest(R,X)" betyr "Restriksjonen av relasjonen R til domenet X".

(7) A;(n+1)Ωf(A;(n+1)) ≠ø & A;(n+1)Ω f(A;1)≠ø Fra (5) – (7) og det forhold at <V,f> er en M-utvalgsstruktur over E følger da at:
f(A;(n+1))ΩA;1 = A;(n+1)Ωf(A;1) Dette vil si at (8) f(a)ΩA;1 = aΩf(A;1). Men nå har vi xêaΩf(A;1). Da må vi ha xêf(a) i lys av (8). Men dette strider åpenbart mot (2.1). Det følger at (5) ikke kan holde. Dette innebærer at ¬(xR*z). Siden zêa har vi da (Ey)(yêa & ¬(xR*y). Vi har dermed vist at (2) holder.

Dette avslutter beviset for Teorem 6.2. **Q.E.D.**

Ved hjelp av Teorem 6.1 er det også nokså lett å vise at følgende sats holder:

Teorem 6.3 Anta PO(R,X). Sett per definisjon:
V = Mg(a: aêPt(X) & Max(R,a)≠ø) & f(a)= Mg(<a, Max(R,a)>: aêV)
Da gjelder at <V,f> er en M-utvalgsstruktur over X, ie Ch(<V,f>,X)

Bevis: Man må bare vise at <V,f> oppfyller kravene i Definisjon 6.1. Når det gjelder krav (i) – (v) skulle dette være temmelig opplagt ut fra definisjonene av V og f i teoremet. At <V,f> oppfyller kravet (vi) følger igjen fra definisjonene av V og f og Teorem 6.1. **Q.E.D.**

§6.1 Preordningsmodeller.

Igjen tas det utgangspunkt i språket L;m. Vi ønsker nå å definere en bestemt klasse av modeller for dette språket. Denne klassen vil bli omtalt som klassen av preordningsmodeller for L;m.

Definisjon 6.1.1 Med en preordningsmodell for L;m forstår vi en struktur M= <X,R,V> som oppfyller de følgende krav:
(i) X er en ikke-tom mengde & PO(R,X)
(ii) V: Var(L;m) –> Pt(X)
Klassen av preordningsmodeller for L;m betegner vi med "PreMod"

Er M=<X,R,V>êPreMod, FêFm(L;m) og wêX definerer vi hva som menes med "Formelen F i L;m er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "True(F,L;m,w,M)" ved den følgende induktive definisjon:

1) True(pk,L;m,w,M) <–> wêV(pk)
(2) True(F&G, L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) & True(G,L;m,w,M))
(3) True(FvG,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) v True(G,L;m,w,M))
(4) True(F–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) –> True(G,L;m,w,M))
(5) True(F<–>G,L;m,w,M) <–> (True(F,L;m,w,M) <–> True(G,L;m,w,M))
(6) True(¬F,L;m,w,M) <–> (¬True(F,L;m,w,M))
(7) True(Nec(F), L;m,w,M) <–> (Aj)(jêX –> True(F,L;m,j,M))
(8) True(Pos(F), L;m,w,M) <–> (Ej)(jêX & True(F,L;m,j,M))
(9) True(Max(F), L;m,w,M) <–> [wêMax(R,Mg(w: True(F,L;m,w,M)))]

Dette avslutter definisjonen av sannhet i en modell.

Vi definerer gyldighet i en modell og gyldighet i en klasse av modeller på vanlig måte. Er M= <X,R,V>êPreMod har vi at Val(M,F), der F er en formel i L;m, hvis og bare hvis (Aj)(jêX –> True(F,L;m,j,M)). Er X en klasse av modeller inkludert i PreMod har vi at

Val(X,F) hvis og bare hvis

(AM)(MêX –> (Aj)(jê(M);1 –> True(F,L;m,j,M))

Det bør nevnes at hvis n er et n-tuple betegner vi den k'te komponenten i tuplet med "(n);k".

Det problemet som nå oppstår er å finne en rekursiv aksiomatisering av alle de formler i L;m som er gyldige i klassen av alle preordningsmodeller for L;m. Det skulle forsåvidt være klart på grunnlag av det vi har bevist så langt at alle teoremer i systemet M er gyldige i Premod, ie. at Val(PreMod,F) om Th;M(F). Men vi har ikke vist at systemet M er komplett med hensyn på denne modellklassen. Det kan, for alt det vi har vist og vet, være at dette ikke er tilfelle.

Lar vi "∏" betegne Mg(F: FêFm(L;m) & Val(PreMod,F)) må det derfor understrekes at det så langt er et åpent spørsmål om det finnes noen rekursiv aksiomatisering av ∏. Dette kan forekomme en sannsynlig, men vi har ikke greid å løse problemet.

Det ville ha vært ønskelig å finne en løsning, spesielt siden sammenlignbarhetsloven for bedre-enn relasjonen ikke er særlig opplagt.

§6.2 Om ytterligere krav som kan stilles til M-utvalgsstrukturer.

I det følgende skal vi anta at <X,V,f> er en struktur som oppfyller de følgende krav:

(i) PO(R,X)
(ii) V= Mg(y: yêPt(X) & Max(R,y)≠ø)
(iii) f = Mg(<a,Max(R,a)>: aêV

Fra det vi har vist tidligere følger det da at <X,V,f> oppfyller kravene til en M-utvalgsstruktur. Det vi nå er interessert i er om strukturer <X,V,f> som oppfyller disse kravene også oppfyller andre krav som ikke følger logisk sett fra de kravene som stilles til en M-utvalgsstruktur. Vi vil nå se på noen mulige slike krav. Det bør likevel understrekes at overveielsene i denne paragrafen er tentative og at vi så langt ikke kan sies å ha nådd frem til noen helt klare konklusjoner. Vi skal imidlertid formulere de resultater vi har nådd frem til som teoremer og gi bevis for dem. Vi ser først på den følgende sats:

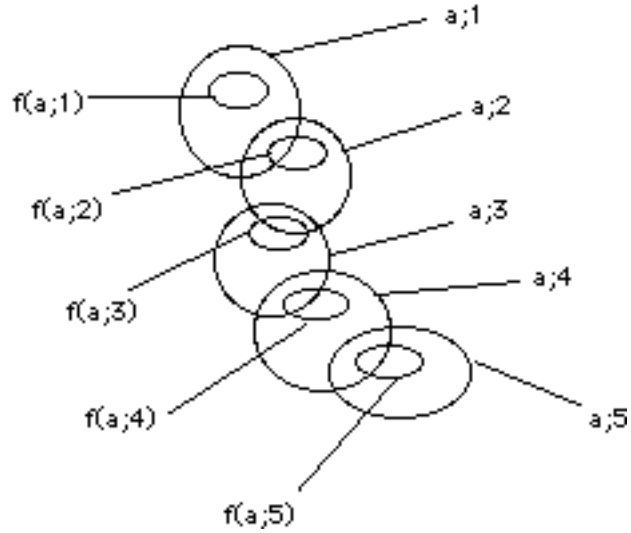
Teorem 6.2.1 Anta PO(R,X) & V= Mg(y: yêPt(X) & Max(R,y)≠ø) &
f = Mg(<a,Max(R,a)>: aêV)

Da gjelder følgende:

Er a;1,....,a;nêV så har man:

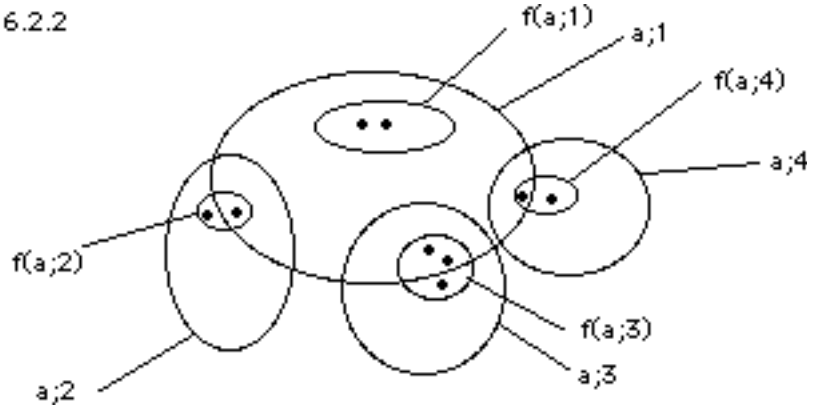
f(a;1)≠ø & f(a;2)Ωa;1≠ø &...& f(a;n)Ωa;(n-1)≠ø –>
f(a;1) Inkl f(UN/i,1,n/(a;i))

FIGUR 6.2.1



Teorem 6.2.2 Anta PO(R,X) & V= Mg(y: yêPt(X) & Max(R,y)≠ø) &
f = Mg(<a,Max(R,a)>: aêV)
Da gjelder følgende:
Er a;1,....,a;nêV så har man:
f(a;1)≠ø & f(a;2)Ωa;1≠ø &...& f(a;n)Ωa;1≠ø –>
f(a;1) Inkl f(UN/i,1,n/(a;i))

FIGUR 6.2.2



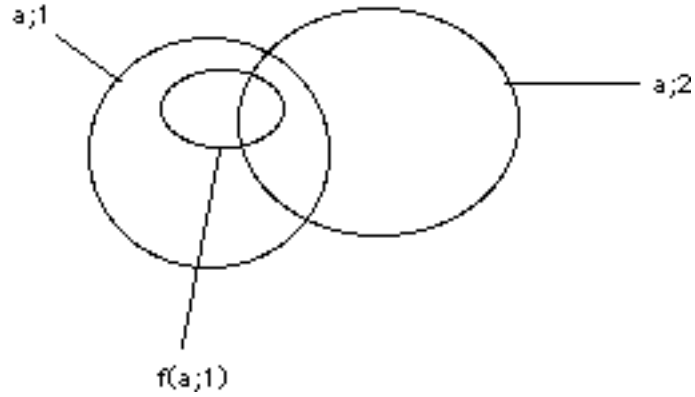
Teorem 6.2.3 Anta PO(R,X) & V= Mg(y: yêPt(X) & Max(R,y)≠ø) &
f = Mg(<a,Max(R,a)>: aêV)
Da gjelder følgende:
Er a;1,a;2êV så har man:
f(a;1)≠ø & f(a;2)Ωa;1≠ø & f(a;2)Ωf(a;1)=ø –> f(a;1)= f(a;1–a;2)

Teorem 6.2.4 Anta PO(R,X) & V= Mg(y: yêPt(X) & Max(R,y)≠ø) &
f = Mg(<a,Max(R,a)>: aêV)
Da gjelder følgende:

Er a;1,a;2êV så har man:
f(a;1)≠ø & a;2Ωf(a;1)= ø –> f(a;1)= f(a;1–a;2)

Teorem 6.2.5 (Arrows aksiom)
Anta PO(R,X) & V= Mg(y: yêPt(X) & Max(R,y)≠ø) &
f = Mg(<a,Max(R,a)>: aêV)
Da gjelder følgende:
Er a;1,a;2êV så har man:
a;1 Inkl a;2 & f(a;2)Ωa;1≠ø –> f(a;2)Ωa;1 = f(a;1)

FIGUR 6.2.3



Teorem 6.2.6 Anta PO(R,X) & V= Mg(y: yêPt(X) & Max(R,y)≠ø) &
f = Mg(<a,Max(R,a)>: aêV)
Da gjelder følgende:
Er a;1,a;2êV så har man:
f(a;1)≠ø & a;2Ωf(a;1) ≠ ø –> f(a;1)Ωa;2 = f(a;1Ωa;2)

I forbindelse med teoremene ovenfor betrakter vi nå de følgende formler i L;m:

(A1) Nec(F <–> G) –> (Max(F) <–> Max(G))
(A2) Nec(Max(F) –> F) & (Pos(Max(F)) –> Pos(Max(Max(F))))
(A3) Konj/1≤k≤(n-1)/(Pos(F;k& Max(F;(k+1)))) & Pos(F;n &Max(F;1) –>.
Konj/1≤k≤(n-1)/(Nec(Max(F;k)& F;(k+1)
<–> F;k& Max(F;(k+1))))

Dette er de aksiomene som inngår i M og som har med Max-operatoren å gjøre.

(C4) Pos(Max(F;1)) & Konj/j,1,n-1/(Pos(F;j&Max(F;j+1)) –>
Nec(Max(F;1) <–> Max(F;1v...vF;n))
(C5) Pos(Max(F;1)) & Konj/j,2,n/(Pos(Max(F;j)&F;1) –>
Nec(Max(F;1) <–> Max(F;1v...vF;n))
(C6) Pos(Max(F;1)) & Pos(F;1&Max(F;2)) & ¬Pos(Max(F;1)&Max(F;2)) –>
Nec(Max(F;1) <–> Max(F;1&¬F;2))

(C7) Pos(Max(F;1)) & ¬Pos(F;2&Max(F;1)) –>
Nec(Max(F;1) <–> Max(F;1&¬F;2))
(C8) Pos(Max(F;1) &¬F;2) –> Nec(Max(F;1)&F;2 <–> Max(F;1&¬F;2))
(C9) Pos(Max(F;1) & F;2) –> Nec(Max(F;1)&F;2 <–> Max(F;1& F;2))

I forbindelse med disse formlene nevner vi at C4 – C9 i en viss forstand "korresponderer" til Teorem 6.2.1 – 6.2.6. Vi nevner også det følgende teorem hvor vi overlater beviset til leseren:

Teorem 6.2.7 Man har at formlene A1 – A3 og C4 – C9 er gyldige i enhver preordningsmodell for L;m.

§7 Syntaktiske derivasjoner.

Vi skal i denne paragrafen gi bevis for endel teoremer i kalkylene M,M+ og M++ og forskjellige utvidelser av disse. Formålet er å kaste noe mer lys over forholdet mellom disse kalkylene.

Teorem 7.1 (M) Nec(F–>G)& Pos(Max(G)&F) & Pos(Max(F)) –>
Nec(Max(G)&F <–> Max(F))

Bevis: Anta antesedenten holder og ¬Pos(G&Max(F)). Da har man Nec(G –> ¬Max(F)). Dette er ekvivalent med Nec(Max(F) –> ¬G). Siden Nec(F–>G) har man da Nec(Max(F) –> ¬F). Men Nec(Max(F) –> F). Derfor Nec(Max(F) –>(F&¬F)). Herav: ¬Pos(Max(F)). Men dette strider mot antesedenten i teoremet. Derfor Pos(G&Max(F)). Men Pos(Max(G)&F). Setter vi n=2 i A3 får man da (1) Nec(Max(G)&F <–> G&Max(F)). Men nå har man at Nec(Max(F)–>F) & Nec(F–>G). Derfor Nec(Max(F) –>G). Herav
Nec(Max(F)&G <–> Max(F)). Dette og (1) gir en så Nec(Max(G)&F <–> Max(F)). **Q.E.D.**

Teorem 7.2 (M) Max(F) –> Max(Max(F))

Bevis: Fra Teorem 7.1 har man om man setter inn "Max(F)" for "F" og "F" for "G" : Pos(Max(F))& Pos(Max(Max(F)) –> Nec(Max(F) <–> Max(Max(F))). Fra dette kan man ved hjelp av A2 utlede at:
Pos(Max(F)) –> Nec(Max(F) <–> Max(Max(F)))
Nå har man Max(F) –> Pos(Max(F)). Derfor:
Max(F) –> (Max(F) <–> Max(Max(F))). Herav: Max(F) –> Max(Max(F)) **Q.E.D.**

Teorem 7.3 (M++) Pos(F)&Pos(G) –>.
Nec(Max(FvG)<–> Max(F)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(G)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(F)vMax(G))

Bevis: Anta Pos(F)&Pos(G). Man har Nec(F –> FvG). Siden Pos(F) har man i kraft av M+ +-aksiomet A5 at Pos(Max(F)). Ved hjelp av Teorem 7.1 følger da:
(1) ¬Pos(Max(FvG)&F) v Nec(Max(FvG)&F <–> Max(F))
Tilsvarende har man siden Nec(G –> FvG) & Pos(Max(G)) siden Pos(G) at:

(2) ¬Pos(Max(FvG)&G) v Nec(Max(FvG)&G <–> Max(G))

Nå har man Nec(Max(FvG) –> FvG) i lys av A2, og derfor:

Nec(Max(FvG) <–> (Max(FvG)&(FvG))). Da:

(3) Nec(Max(FvG) <–> [Max(FvG)&F v Max(FvG)&G]

Det er nå fire muligheter: (i) Pos(Max(FvG)&F) v ¬Pos(Max(FvG)&G)

I dette tilfellet har man:

Nec(Max(FvG)&F <–> Max(F)) ved hjelp av (1) og dessuten:

Nec(Max(FvG)&G <–> G&¬G)

Fra disse to setningene og (3) følger så Nec(Max(FvG)<–> Max(F)). Satsen holder derfor i dette tilfelle.

(ii) ¬Pos(Max(FvG)&F) v Pos(Max(FvG)&G) I dette tilfellet har man ved hjelp av (2):

Nec(Max(FvG)&G <–> Max(G))

Nec(Max(FvG)&F <–> G&¬G)

Fra disse to tingene og (3) følger Nec(Max(FvG)<–> Max(G)). Satsen holder derfor i dette tilfellet. (iii) Pos(Max(FvG)&F) v Pos(Max(FvG)&G). Ved hjelp av (1) og (2) utleder man i dette tilfellet:

Nec(Max(FvG)&F <–> Max(F))

Nec(Max(FvG)&G <–> Max(G))

Fra dette og (3) utleder man: Nec(Max(FvG). <–>.Max(F)vMax(G)). Det følger at satsen holder også i dette tilfellet.

(iv). ¬Pos(Max(FvG)&F) v ¬Pos(Max(FvG)&G). Fra dette og (3) følger da at ¬Pos(Max(FvG)). Men vi forutsetter at Pos(F). Da følger Pos(FvG). Men dette og A5 impliserer Pos(Max(FvG)). Men dette viser at ¬Pos(Max(FvG)) er umulig. Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Teorem 7.4 (M++) Pos(Max(F)) & Pos(F&Max(G)). –> Nec(Max(F) –> Max(FvG))

Bevis: Siden Pos(Max(F)) & Pos(F&Max(G)) og man dessuten har at Nec(Max(G)–> G) & Nec(Max(F) –>F) følger at Pos(F)&Pos(G). Fra dette og Teorem 7.3 har man da:

Nec(Max(FvG)<–> Max(F)) v

Nec(Max(FvG) <–> Max(G)) v

Nec(Max(FvG) <–> Max(F)vMax(G))

I det første og siste tilfellet holder åpenbart satsen. I det tilfelle at Nec(Max(FvG) <–> Max(G)) følger (1) Pos(F&Max(FvG)) siden vi per hypotese har at Pos(F&Max(G)). Siden vi på den annen side har at Nec(Max(F) –>FvG) og Pos(Max(F)) følger (2) Pos((FvG)&Max(F)). Fra (1) og (2) og A3 følger:

(3) Nec((FvG)&Max(F) <–> F& Max(FvG)) i det man setter n=2 og setter inn "F" for "F;1" og "FvG" for F;2. Men fra (3) følger siden man har Nec(Max(F) –>. Max(F)&(FvG)) at Nec(Max(F) –> Max(FvG)). **Q.E.D.**

Teorem 7.5 (M++)

(a) Pos(Max(F;1)) & Konj/j,1,n-1/(Pos(F;j&Max(F;j+1)) –>
Nec(Max(F;1) <–> Max(F;1v...vF;n))

(b) Pos(Max(F;1)) & Konj/j,2,n/(Pos(Max(F;j)&F;1) –>
Nec(Max(F;1) <–> Max(F;1v...vF;n))

Bevis: (a) Fra de to første hypotesene følger ved hjelp av Teorem 7.4 at Nec(Max(F;1) –> Max(F;1vF;2)). Men da (1) Pos(Max(F;1vF;2)). Fra den tredje hypotesen følger: (1) Pos((F;1vF;2)&Max(F;3)). Fra (1), (2) og Teorem 7.4 følger så Nec(Max(F;1vF;2) –> Max(F;1vF;2vF;3)). Ved å iterere denne prosedyren n ganger får man konsekventen i punkt (a).

(b) Fra de to første hypotesene følger ved hjelp av Teorem 7.4 at Nec(Max(F;1)–> Max(F;1vF;2)). Men da har vi siden Pos(Max(F;1)) at Pos(Max(F;1vF;2)). Fra den tredje hypotesen har man Pos((F;1vF;2)&Max(F;3)). I lys av Teorem 7.4 må man da kunne slutte:

Nec(Max(F;1vF;2) –> Nec(Max(F;1vF;2vF;3))). Siden Pos(Max(F;1vF;2)) kan man da slutte Pos(Max(F;1vF;2vF;3)). Ved å iterere denne prosessen oppnår man: Nec(Max(F;1) –> Max(F;1v...vF;n)). **Q.E.D.**

Teorem 7.6 (M++) Pos(Max(F)&G) –> Nec(Max(F)&G <–> Max(F&G))

Bevis: Vi har fra hypotesen, siden Nec(Max(F) –>F) og derfor Nec(Max(F)&G –>F&G) at Pos(F&G). Dette og A5 impliserer (1) Pos(Max(F&G)). Nå har vi også (2) Nec(F&G –>F) og dessuten fra hypotesen at (3) Pos(Max(F)&F&G). Dette siste følger i lys av at Nec(Max(F) –>F) Fra (1)–(3) og Teorem 7.1 følger:

Nec(Max(F)&(F&G) <–> Max(F&G))

Men det skulle være klart at Nec((Max(F)&(F&G) <–> Max(F)&G). Det følger derfor at: Nec(Max(F)&G <–> Max(F&G)) **Q.E.D.**

Kommentar: Fra beviset for Teorem 7.5 fremgår det at om man legger til følgende formel:

C4˚ Pos(Max(F)) & Pos(F&Max(G)). –> Nec(Max(F) –> Max(FvG))

som et nytt aksiom i kalkylen M så er formlene C4 og C5 som vi nevnte i §6.2 utledbare i den kalkylen som fremkommer som resultat. Fra Teorem 7.6 ser man også at C9 i §6.2 er utledbar i M++.

Er S en kalkyle og A1,...,An aksiomskjemaer betegnes den kalkylen som man får når aksiomskjemaene i S utvides med A1,...,An med "S[A1,...,An]".

Teorem 7.7 (M[C9])

(a) Pos(Max(F)&¬G) –> Nec((Max(F)&¬G)<–> Max(F&¬G))

(b) Pos(Max(F)) & ¬Pos(G&Max(F)) –>
Nec(Max(F) <–> Max(F&¬G))

(c) Pos(Max(F)) & ¬Pos(Max(F)&Max(G)) & Pos(F&Max(G)) –>
Nec(Max(F) <–> Max(F&¬G))

Bevis: Man ser umiddelbart at (a) følger fra C9 ved å sette inn "F" for "F;1" og "¬G" for "F;2" i C9. Når det gjelder (b), anta Pos(Max(F)) & ¬Pos(G&Max(F)). Fra det siste følger Nec(Max(F) –>¬G). Siden Pos(Max(F)) følger derfor at Pos(Max(F)&(¬G)). Påstanden følger så ved hjelp av punkt (a) i teoremet.

Anta (1) Pos(Max(F)) & ¬Pos(Max(F)&Max(G)) & Pos(F&Max(G)). Da følger (2) Nec(Max(F) <–> ¬Max(G)). Anta nå for reduktio ad absurdum at (3) Pos(Max(F)&G). Fra dette, (1) og A3 følger :

Nec(Max(F)&G <–> F&Max(G)). Herav:

Nec(Max(F)&G <–> Max(G)&Max(F)). Men fra dette og (3) følger

Pos(Max(F)&Max(G)) som åpenbart strider mot (2). Man må derfor ha at ¬Pos(Max(F)&G). Dette, (1) og det som ble vist under punkt (b) impliserer Nec(Max(F) <–> Max(F&¬G)). **Q.E.D.**

Teorem 7.8 (M[C4˚,C9]) C4 & C5 & C6 & C7 & C8.

Bevis: Dette følger fra det som er omtalt i kommentaren ovenfor, samt Teorem 7.7. **Q.E.D.**

Det skulle også være lett å se fra det vi så langt har bevist at også den følgende sats holder:

Teorem 7.9 (M++) C4˚ &C2 & C3 & C4 & C5 & C6 & C7 & C8.

Fra beviset for Teorem 7.3 fremgår det at man har:

Teorem 7.10 (M) Pos(Max(F))&Pos(Max(G))& Pos(Max(FvG)) –>.
Nec(Max(FvG)<–> Max(F)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(G)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(F)vMax(G))

Bevis: Vi overlater til leseren å kontrollere riktigheten av denne påstanden. **Q.E.D.**

La oss nå betrakte det følgende aksiom i L;m:

(C10) Pos(Max(F)) & Pos(F&Max(G)) –> Pos(Max(FvG))

Det fremgår da fra beviset for Teorem 7.4 at man da må ha:

Teorem 7.11 M[C10] = M[C4˚]

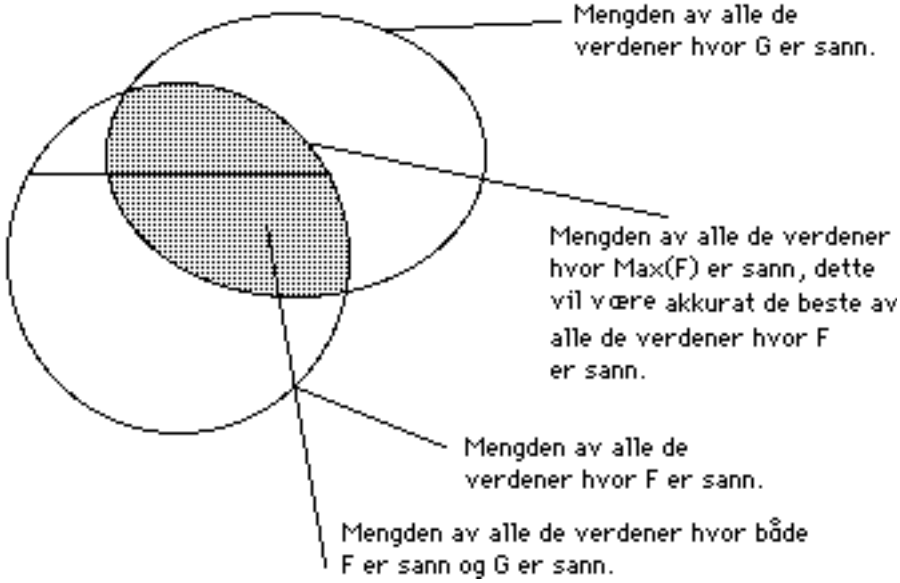
Dette vil si at de to systemene M[C10] og M[C4˚] er deduktivt ekvivalente. Alle teoremer i det ene systemet er teoremer i det andre og omvendt.

Vi vil også betrakte den følgende formel i L;m:

(C11) Pos(Max(F)&G) –> Pos(Max(F&G)

Den følgende figur gir en illustrasjon som viser at C11 intuitivt sett er rimelig.

Figur 7.1



Fra beviset for Teorem 7.6 kan man se at vi må ha:

Teorem 7.12 (M[C11]) Pos(Max(F)&G) –> Nec((Max(F)&G) <–> Max(F&G))

Fra dette går det frem at formelen C9 er utledbar i kalkylen M utvidet med C11. Det skulle også være klart at C11 kan utledes fra C9. Av denne grunn har man også:

Teorem 7.13 M[C11] = M[C9]

Siden C11 er en kortere og enklere formel enn C9 kan det være mer naturlig å bruke C11 som et aksiom enn C9.

På dette punkt kan det være av en viss interesse å nevne ytterligere noen satser som kan belyse forholdet mellom formlene C4 – C11.

La oss først notere den følgende sats:

Teorem 7.14 (M[C11]) Pos(G) & Nec(G –> Max(F)). –>
Nec((Max(F)&G) <–> Max(G))

Bevis: Fra hypotesene følger Pos(Max(F)&G). Dette og Teorem 7.12 gir en: (1) Nec((Max(F)&G) <–> Max(F&G)). Men Nec(Max(F) –> F). Dette og den andre hypotesen gir en Nec(G –> F). Men fra dette har man Nec(F&G <–> G). Fra dette og (1) følger så Nec((Max(F)&G) <–> Max(G)). **Q.E.D.**

I lys av det som så langt er bevist har man:

Teorem 7.15 M[C10] = M[C4˚] = M[C4, C5]

Det eneste man behøver å peke på her er at C4˚ følger temmelig direkte fra C4 i nærvær av de andre aksiomene i M.

I forbindelse med C10 kan det nevnes at A4 er sterkere enn A10. Vi har:

Teorem 7.16 M[C10] SInkl M+

At inklusjonen er streng tar det noe tid å bevise. Man må da vise at det finnes en modell for M[C10] som ikke verifiserer det karakteristiske M+-aksiomet A4. Det ville være en god øvelse for leseren allerede på dette punkt å spesifisere en slik modell. Det bør nevnes at det er forholdsvis greit.

At A4 impliserer C11 skulle det heller ikke være så vanskelig å se at er tilfelle: Pos(Max(F)) & Pos(F&Max(G)) impliserer Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)). Dette og A4 impliserer så Pos(Max(FvG)). Dette viser at påstanden holder.

§8 Sammenhengen mellom operatoren Max og operatorene Pr, Ekv og Pr*

Vi innfører den binære setningsdannende konstruksjonen på setninger, Pr, ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.1 Pr(F,G) <–>
Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) & Nec(Max(F) –> Max(FvG))

Intuitivt er det meningen at en setning av typen Pr(F,G) skal regnes som sann i en verden w hvis og bare hvis de beste verdenene hvor F er sann er minst like bra som de beste verdenene hvor G er sann og det samtidig finnes noen beste verdener blandt dem hvor F er sann og det samme gjelder for G. At det finnes noen beste verdener blant alle dem hvor F er sann er uttrykt ved klausulen Pos(Max(F)) i definisjonen. At det finnes maximale elementer i klassen av alle de verdener hvor G er sann er uttrykt ved Pos(Max(G). Endelig uttrykker den siste klausulen i definiens at de beste verdenene hvor F er sann er minst like bra som de beste hvor G er sann.

Teorem 8.1 (M[C10,C11]) (a) Pr(F,G) & Pr(G,H) –> Pr(F,H)
(b) Pos(Max(F)) –> Pr(F,F)

Bevis: Det siste punktet i satsen er trivielt i lys av definisjonen av Pr. La oss derfor ta for oss (a): Anta Pr(F,G) & Pr(G,H). I lys av definisjonen av Pr impliserer dette:

(1) Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) & Pos(Max(H))
(2) Nec(Max(F) –> Max(FvG))
(3) Nec(Max(G) –> Max(GvH))

Fra (1) følger selvfølgelig Pos(Max(G)) som sammen med (3) impliserer at Pos(Max(G)&Max(GvH)). Siden Nec(Max(G) –> G) følger herav Pos(G& Max(GvH)). Siden Nec(G –> FvG) følger videre:

(4) Pos((FvG)&Max(GvH))

Siden Pos(Max(F)) og (2) holder har man (5) Pos(Max(FvG)). I lys av (4) og (5) og C4 har man:

(6) Nec(Max(FvG) –> Max(FvGvH))

Ved hjelp av (2) følger:

(7) Nec(Max(F) –> Max(FvGvH))

Nå har man Pos(Max(F)) og derfor ved hjelp av (7) at
Pos(Max(F) &Max(FvGvH)). Siden Nec(Max(F) –> F) følger at:

Pos(F&Max(FvGvH)). Fra dette og det forhold at Nec(F –> FvH) følger:

(8) Pos((FvH)& Max(FvGvH))

Nå har man også åpenbart at:

(9) Nec(FvH –> (FvGvH)). Fra (8) og C11 følger at Pos(Max((FvGvH)&(FvH)).

Men dette siste er ekvivalent med:

(10) Pos(Max(FvH)) siden Nec((FvGvH)&(FvH) <–> (FvH))

Fra (8), (9), (10) og Teorem 7.1 kan man slutte:

Nec(Max(FvGvH)& (FvH) <–> Max(FvH))

Siden Nec(Max(F) –> FvH) og (7) holder har vi da Nec(Max(F) –> Max(FvH)). Sammen med (1) og definisjonen av Pr gir dette en Pr(F,H). **Q.E.D.**

Vi innfører en "ekvivalensoperator", " Ekv", ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.2 Ekv(F,G) <–> (Pr(F,G) &Pr(G,F))

Uttrykket "Ekv(F,G)" skal vi tillate oss å lese "De beste verdenene blandt de verdenene hvor F er sann er nøyaktig like bra som de beste verdenene blandt dem hvor G er sann". La oss med sannhetsmengden til en setning F forstå klassen av alle de logisk mulige verdener hvor F er sann. Det er da hensikten at en setning av typen "Ekv(F,G)" skal regnes som sann i en verden w hvis og bare hvis det finnes maksimale elementer i sannhetsmengdene til F og G og de maksimale elementene i sannhetsmengden til F er like bra som de maksimale elementene i sannhetsmengden til G. I lys av denne regelen som fastsetter sannhetsbetingelsene til setninger av typen "Ekv(F,G)" virker den lesemåten som ble foreslått ovenfor rimelig.

Teorem 8.2 (M[C10,C11])

Ekv(F,G) <–> Pos(Max(FvG)& Max(F)) & Pos(Max(FvG) & Max(G))

Bevis: (a) Anta Ekv(F,G). Da følger Pr(F,G) & Pr(G,F). Dette og definisjonen av Pr impliserer:

(1) Pos(Max(F)) & Pos(Max(G))

(2) Nec(Max(F) –> Max(FvG))

(3) Nec(Max(G) –> Max(FvG))

Fra dette følger nokså åpenbart at Pos(Max(FvG)& Max(F)) og dessuten at Pos(Max(FvG)& Max(G)). Fra disse to ting følger høyre side i satsen.

(b) Anta Pos(Max(FvG)& Max(F)) & Pos(Max(FvG) & Max(G)). Den første konjunkten her impliserer at (4) Pos(Max(F)) og dessuten siden Nec(Max(F) –>F) holder generelt at Pos(F &Max(FvG)). Fra dette, (4) og C4 som kan utledes i M[C10,C11] følger Nec(Max(F) –> Max(FvG)). Siden vi også har Pos(Max(G)) følger Pr(F,G). Tilsvarende følger at Pos(G&Max(FvG)) og at Pos(Max(G)). Ved hjelp av C4 kan vi da utlede Nec(Max(G) –> Max(FvG)). Dette og det forhold at Pos(Max(F)) og Pos(Max(G)) innebærer at Pr(G,F). Fra Pr(F,G) og Pr(G,F) følger ved hjelp av definisjonen av Ekv at Ekv(F,G). **Q.E.D.**

Det følgende teorem viser at Ekv har de egenskapene man forventer av en ekvivalensrelasjon:

Teorem 8.3 (M[C10,C11])

(a) Ekv(F,G) & Ekv(G,H) –> Ekv(F,H)

(b) Ekv(F,G) –> Ekv(G,F)

(c) Pos(Max(F)) –> Ekv(F,F)

Bevis: (a) Anta Ekv(F,G) & Ekv(G,H). Da følger ved hjelp av definisjonen av Ekv at Pr(F,G) & Pr(G,F) & Pr(G,H) & Pr(H,G). Fra dette og Teorem 8.1 følger åpenbart Pr(F,H) & Pr(H,F) og derfor Ekv(F,H).

(b) Ekv(F,G) impliserer Pr(F,G)&Pr(G,F). Derfor Pr(G,F) &Pr(F,G). Dette i sin tur impliserer at Ekv(G,F).

(c) Dette følger fra punkt (b) i Teorem 8.1. **Q.E.D.**

Vi definerer en streng preferanseoperator Pr* ved:

Definisjon 8.3 Pr*(F,G) <–> (Pr(F,G) &¬Pr(G,F))

Man kan da lett bevise den følgende sats:

Teorem 8.4 (M[C10,C11])
(a) Ekv(F,G) & Pr*(G,H) –> Pr*(F,H)
(b) Ekv(F,G) & Pr*(H,G) –> Pr*(H,F)

Bevis: Ekv(F,G) & Pr*(G,H) impliserer per definisjon at (1) Pr(F,G) & Pr(G,F) og dessuten at (2) Pr(G,H) & ¬Pr(H,G). Den første komponenten i (1) og den første komponenten i (2), samt Teorem 8.1 impliserer at Pr(F,H). Anta Pr(H,F). Fra dette, Teorem 8.1 og den første komponenten i (1) har vi: Pr(H,G). Men dette strider mot den andre komponenten i (2). Man har derfor; Pr(F,H) &¬Pr(H,F). Derfor Pr*(F,H). Punkt (b) i teoremet bevises på en lignende måte. Beviset overlates til leseren. **Q.E.D.**

Teorem 8.5 (M[C10,C11])
Pr(F,G) v Pr(G,F) .<–> (Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) & Pos(Max(FvG)))

Bevis: Kondisjonalen mot høyre følger lett ved hjelp av definisjonen av Pr. Når det gjelder kondisjonalen mot venstre anta at høyre side holder. I lys av Teorem 7.10 har man da:

Nec(Max(FvG)<–> Max(F)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(G)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(F)vMax(G))

I det første tilfellet har man Nec(Max(F) –>Max(FvG)) og derfor Pr(F,G). Da Pr(F,G)vPr(G,F). I det andre tilfellet har man Nec(Max(G) –> Max(FvG)) og derfor siden Pos(Max(F))& Pos(Max(G)) at Pr(G,F). Også i dette tilfellet holder venstre side i teoremet. I det siste tilfellet har man:

Nec(Max(F) –>Max(FvG)) Siden Pos(Max(F))& Pos(Max(G)) følger da ved hjelp av definisjonen av Pr at Pr(F,G). Dette impliserer Pr(F,G)v Pr(G,F). **Q.E.D.**

Som et korollar til Teorem 8.5 har man:

Teorem 8.6 (M[C10,C11])
Pr*(F,G) v Ekv(F,G)vPr*(G,F) .<–>
(Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) & Pos(Max(FvG)))

Bevis: Man har at (+) Pr(F,G) <–>. Pr*(F,G) v Ekv(F,G). La oss vise dette. Anta Pr(F,G). Fra definisjonen følger da at (1) Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) & Nec(Max(F) –> Max(FvG)). Anta ¬(Ekv(F,G)). Da følger i lys av definisjonen av Ekv:

¬{Pos(Max(FvG)&Max(F)) & Pos(Max(FvG)&Max(G))}
Dette innebærer at: (2) Pos(Max(FvG)&Max(F)) –> ¬(Pos(Max(G)&Max(FvG)))
Fra (1) har man at Pos(Max(FvG)&Max(F)). Dette og (2) gir:
(3) ¬(Pos(Max(G)&Max(FvG))) Hadde man nå hatt Pr(G,F) vil vi ha hatt at Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) & Nec(Max(G) –> Max(FvG)) og derfor Pos(Max(G)&Max(FvG)). Men dette strider mot (3). Det følger at Pr(F,G) &¬(Pr(G,F)), med andre ord at Pr*(F,G). Vi har nå vist kondisjonalen mot høyre i (+). La oss vise kondisjonalen mot venstre: Anta
Pr*(F,G) v Ekv(F,G). Har vi Pr*(F,G) følger umiddelbart at Pr(F,G) i lys av definisjonen av Pr*. Anta Ekv(F,G). Da følger fra definisjonen av Ekv:
Pos(Max(FvG)&Max(F)) & Pos(Max(FvG)&Max(G)). Men fra dette følger Pos(Max(F)) & Pos(F&Max(FvG)). Fra dette og C4 kan man da slutte
Nec(Max(F) –> Max(Fv(FvG)). Herav Nec(Max(F) –> Max(FvG)). Men siden vi nå også har Pos(Max(F)) og Pos(Max(G)) følger ved hjelp av definisjonen av Pr at Pr(F,G). Dette viser at (+) holder. Men fra (+) følger at
Pr(F,G)v Pr(G,F) .<–>. Pr*(F,G) v Ekv(F,G) v Pr*(G,F) **Q.E.D.**

Teorem 8.7 (M) Nec(Max(F) <–> Max(G)) –>
(Pr(F,H) <–> Pr(G,H)) & (Pr(H,F) <–> Pr(H,G)) &
(Pr*(F,H) <–> Pr*(G,H)) & (Pr*(H,F) <–> Pr*(H,G)) &
(Ekv(F,H) <–> Ekv(G,H)) & (Ekv(H,F) <–> Ekv(H,G))

Bevis: Beviset er trivielt og overlates til leseren. **Q.E.D.**

Teorem 8.8 (M[C9]) Pos(Max(F)) & ¬Pos(G&Max(F)). –>.
Pr*(F,G) <–> Pr*(F&¬G),G)

Bevis: Dette følger ved hjelp av Teorem 7.7 og Teorem 8.7. **Q.E.D.**

Teorem 8.9 (M[C10]) Pr*(F,G) –> Pos(Max(F))& ¬Pos(G& Max(F))

Bevis: Anta Pr*(F,G). Fra definisjonen av Pr * og Pr har man da:
(1) Pos(Max(F)) & Pos(Max(G))
(2) Nec(Max(F) –> Max(FvG))
(3) ¬Nec(Max(G) –> Max(FvG))
Anta for reduktio ad absurdum at Pos(G& Max(F)). Fra dette, (1), C10 og Teorem 7.10 kan man da slutte: Nec(Max(G) –> Nec(Max(FvG)). Dette strider mot (3). Derfor ¬Pos(G& Max(F)). At man kan slutte Pos(Max(F)) fra Pr*(F.G) følger direkte fra (1). **Q.E.D.**

Fra Teorem 8.8 og Teorem 8.9 har man:

Teorem 8.10 (M[C9, C10]) Pr*(F,G) –> Pr*(F&¬G),G)

Vi kan også bevise et teorem som er sterkere enn Teorem 8.8:

Teorem 8.11 (M[C9, C10]) Pos(Max(F)) –> (Pr*(F&¬G),G) –> Pr*(F,G))

Bevis: Anta (1) Pos(Max(F)) & Pr*(F&¬G),G). Fra det siste følger ved hjelp av definisjonen av Pr* :

(2) Pos(Max(F&¬G)) & Pos(Max(G))
(3) Nec(Max(F&¬G) –> Max(F&¬G.v G)
(4) ¬Nec(Max(G) –> Max(F&¬G. v G)

Fra (3) og (4) har man, siden F&¬G.vG <–> FvG at:

(5) Nec(Max(F&¬G) –> Max(FvG))
(6) ¬Nec(Max(G) –> Max(FvG))

Nå har man fra (2) og (5) at Pos(Max(FvG)). Dette, sammen med (1), (2) og Teorem 7.10 impliserer:

Nec(Max(FvG)<–> Max(F)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(G)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(F)vMax(G))

Det andre tilfellet er her utelukket i kraft av (6). De to andre tilfellene impliserer begge Nec(Max(F) –> Max(FvG)). Men dette, sammen med (1), (2) og (6), samt definisjonen av Pr* impliserer Pr*(F,G).

§9 En syntaktisk deduksjon av P0-Det fra systemet M++:u

I denne paragrafen vil det bli gitt et detaljert bevis som viser at systemet P0-Det er inkludert i M++;u. Vi skal først bevise:

Teorem 9.1 (M++;u) Pr*(F,G) <–>. Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)) &
Nec(Max(F) –> Max(FvG)) & ¬ Nec(Pos(Max(G) –> Max(FvG))

Bevis: Siden Pos(F) –> Pos(Max(F)) er et aksiom i M++;u har vi at Pos(Max(F)&G) –> Pos(Max(F&G)) er et teorem i dette systemet. Det kan være hensiktsmessig å minne om at Nec(Max(F) –>F) er et teorem i M++;u i denne forbindelse. I lys av Teorem 7.13 og Teorem 7.16 har vi derfor at M[C9, C10] Inkl M++;u.

Anta Pr*(F,G). Ved hjelp av A6 følger:

(1) Pos(F)& Pos(G) & ¬(Pos(Max(FvG)&Max(G)))

Fra (1) har vi siden Pos(F) –> Pos(Max(F)) er et aksiom i M++;u:

(2) Pos(Max(F)) & Pos(Max(G))

Videre har vi (3) Nec(Max(G) –> ¬Max(FvG)). Fra (2) og A5 følger Pos(Max(FvG)). Ved hjelp av Teorem 7.10 kan man da slutte:

Nec(Max(FvG)<–> Max(F)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(G)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(F)vMax(G))

Fra (1) følger at den andre disjunkten er utelukket. Vi har derfor:

Nec(Max(FvG) <–> Max(F)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(F)vMax(G))

Fra dette følger Nec(Max(G) –> Max(FvG)). Fra dette og (1) har vi at høyre side i teoremet holder.

La oss se på kondisjonalen mot venstre. Det følger umiddelbart fra høyre side at Pos(F)& Pos(G). Anta for reduktio ad absurdum at
(4) Pos(Max(FvG)&Max(G)). Da har man (5) Pos(Max(FvG)) og derfor i lys av Teorem 7.10:

Nec(Max(FvG)<–> Max(F)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(G)) v
Nec(Max(FvG) <–> Max(F)vMax(G))

Den andre disjunkten er her utelukket siden vi forutsetter at høyre side i teoremet holder.

Anta Nec(Max(F) <–> Max(FvG)). Da har vi i lys av (4) og (5) at Pos(Max(F)&Max(G)). Herav: Pos(G &Max(F)) & Pos(Max(G)). Siden
M[C10] Inkl M++;u følger da Nec(Max(G) –> Max(FvG)) som er umulig. Anta den siste disjunkten holder. Da har man umiddelbart at Nec(Max(G) –> Max(FvG)). Noe som også er umulig. Det følger at ¬Pos(Max(FvG)&Max(G)). Dette sammen med Pos(F)& Pos(G) gir oss Pr*(F,G) i lys av A6. **Q.E.D.**

Teorem 9.2 (M++)

(i) Pr*(F,G) & Pr*(G,H) –> Pr*(F,H)
(ii) Pr*(F,G) –> ¬Pr*(G,F)
(iii) ¬Pr*(F,F)
(iv) Ekv(F,G) & Ekv(G,H) –> Ekv(F,H)
(v) Ekv(F,G) –> Ekv(G,F)
(vi) Pos(F) –> Ekv(F,F)
(vii) Ekv(F,G) & Pr*(F,H) –> Pr*(G,H)
(viii) Ekv(F;G) & Pr*(H,F) –> Pr*(H,G)
(ix) Pos(F)&Pos(G) –>. Pr*(F,G) v Ekv(F,G) v Pr*(G,F)
(x) Ekv(F,G) v Pr*(F,G). –>. Pos(F) & Pos(G)
(xi) Pos(F) –> Pr*((Gv¬G),F) v Ekv((Gv¬G),F)
(xii) Pr*(F,G) <–> Pr*((F&¬G),G)

Bevis: Siden M[C9, C10] Inkl M++ har vi at (i), (ii), (iv), (v), (vii) og (viii) følger fra Teorem 8.1, Teorem 8.3 og Teorem 8.4. (iii) følger fra (i) og (ii). Siden Pos(F)–>Pos(Max(F)) er et aksiom i M++ følger (vi) ved hjelp av Teorem 8.3. Ved hjelp av dette aksiomet ser man også at man må ha:

Pos(F) & Pos(G). –>. Pos(Max(FvG)) & Pos(Max(F)) & Pos(Max(G))

Fra dette og Teorem 8.6 følger (ix). I lys av definisjonene av Pr*(F,G) og Ekv(F,G) har vi Pos(Max(F)) & Pos(Max(G)), og derfor Pos(F) og Pos(G). Dette viser at (x) holder.

Har man Pos(F) følger Pos(Max(F)) siden A5 er et aksiom i M++. Nå har man Pos(Max(Gv¬G)) ved hjelp av det samme aksiom. Videre:

Nec(Max(Gv¬G) –> Max((Gv¬G)vF)) siden (Gv¬G)vF er ekvivalent med (Gv¬G). Fra disse tre forhold kan man i lys av definisjonen av Pr slutte at Pr((Gv¬G),F). Fra dette, Teorem 8.6 og definisjonen av Pr* følger:

Pr*((Gv¬G),F) v Ekv((Gv¬G),F). Dette viser at (xi) holder.

Den ene halvdelen av (xii) følger fra Teorem 8.10. Anta Pr*((F&¬G),G). Fra definisjonene av Pr* og Pr har man da Pos(Max(F&¬G)) og derfor Pos(F&¬G). Herav Pos(F) og derfor Pos(Max(F)) i lys av A5. Fra dette, Teorem 8.11 og Pr*((F&¬G),G) følger Pr*(F,G). Dette viser at (xii) holder.

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Siden de modale- og setningslogiske lovene er de samme i M++;u og P0 har vi nå vist:

Teorem 9.3 P0 Inkl M++;u

Vi kan også vise:

Teorem 9.4 (M++) (a) Pr*(F,G) –> Nec(Pr*(F,G))
(b) Ekv(F,G) –> Nec(Ekv(F,G))

Dette følger greit fordi man har:

(1) Pos(F) –> Nec(Pos(F)) og

(2) Nec(F) –> Nec(Nec(F))

Ved hjelp av definisjonene av Pr* og Ekv er det lett å utlede satsen ved hjelp av disse lovene.

Fra Teorem 9.3 og Teorem 9.4 fremgår det at vi derfor må ha:

Teorem 9.5 P0-Det Inkl M++;u

§10 Om en bestemt type av utvalgsstrukturer, P-strukturer, og om eksistensen av underliggende preferanserelasjoner i denne typen av strukturer.

I dette avsnittet skal vi først definere hva som menes med en P-struktur. Dernest skal vi vise hvordan man gitt en preordning R over et domene X kan konstruere en P-struktur. Videre skal vi vise hvordan man gitt en P-struktur kan konstruere en underliggende preordning til strukturen. De satser som vi viser her er i en viss forstand analoge med Teorem 1.1 og Teorem 1.2 i §1 i denne delen.

Vi gir den følgende definisjon av P-struktur:

Definisjon 10.1 En P-struktur er et tuple <f,Q,X> som oppfyller de følgende krav:

(i) Q Inkl Pt(X) & X≠ø

(ii) a,bêQ –> aUbêQ

(iii) a,bêQ –> .aΩbêQ & (X–a)êQ

(iv) Func(f) & Dom(f)=Q & Rgn(f) Inkl Q

(v) (Aa)(aêQ –>. f(a) Inkl a & f(f(a)) = f(a))

(vi) For alle a;1,....,a;nêQ (n≥2) gjelder at dersom a;nΩc(a;1)≠ø og Konj/k,1,n-1/(a;kΩc(a;k+1)≠ø) så har man:
SN/k,1,n–1/(c(a;k)Ωa;k+1 = a;kΩc(a;k+1))

(vii) a,bêQ & f(a)≠ø & aΩf(b)≠ø –> f(a) Inkl f(aUb)

(viii) a,bêQ –> (f(a)Ωb≠ø –> f(a)Ωb = f(aΩb))

(ix) Seq(g) & (Aj)(jêDom(g) –> f(g(j)) Inkl Q) &
(Am)(mêOn & mêDom(g) –> f(g(m))≠ø) &
(Am)(mêDom(g) –> f(g(0)) Inkl f(UN/n≤m/(g(n)))). –> .
f(UN(Rgn(g)))≠ø & f(g(0)) Inkl f(UN(Rgn(g)))

(x) X = UN/aêQ/(f(a))

I det følgende skal vi bevise to satser om P-strukturer. Den første er den følgende sats. Den sier at dersom R er en preordning over et ikke-tomt område X, f er definert som Mg(<a,Max(R,a)>: aêPt(X)) og Q =Pt(X) så er <f,Q,X> en P-struktur i betydningen ovenfor.

Teorem 10.1 Har man at PO(R,X) & X≠ø & f = Mg(<a,Max(R,a)>: aêPt(X)) & Q=Pt(X) gjelder at P-Struk(<f,Q,X>).

Bevis: I det vesentlige har vi bevist dette tidligere. Det er temmelig klart at <f,Q,X> oppfyller kravene (i) – (vi). Det er også forholdsvis lett å vise at <f;Q,X> under de gitte forutsetninger oppfyller kravene (vii) og (viii). Siden
Mg({x}: xêX} Inkl Q= Pt(X) og Max(R,{x}} = {x} har vi at X= UN/aêQ/(f(a)). Dette viser at kravet (x) er oppfylt.

La oss vise at <f,Q,X> oppfyller kravet (ix). Anta derfor
(1) Seq(g) & (Aj)(jêDom(g) –>. f(g(j))≠ø & f(g(j)) Inkl Q) &
&(Am)(mêDom(g) –> f(g(0)) Inkl f(UN/n≤m/(g(n))))
Vi ønsker å vise at (+) f(UN(Rgn(g)))≠ø og at f(g(0)) Inkl f(UN(Rgn(g))). Fra den andre konjunkten følger at f(g(0))≠ø. Dette innebærer at det finnes x;0 slik at x;0êf(g(0)). Fra dette og den tredje konjunkten i (1) følger:
(2) (Am)(mêDom(g) –> x;0êf(UN/n≤m/(g(n))))
Anta yêUN(Rgn(g)) for vilkårlig y. Da har man yêg(k) for noe kêDom(g). Fra dette følger (3) yêUN/j≤k/(g(j)). Fra (2) følger (4) x;0êf(UN/j≤k/(g(j)). Fra (4) og definisjonen av f følger så: x;0êMax(R, UN/j≤k/(g(j))). Fra dette og (3) har vi x;0Ry. Vi har også x:0êf(g(0)) Inkl g(0) Inkl UN(Rgn(g)). Vi har derfor at
x;0êUN(Rgn(g)) & (Ay)(yêUN(Rgn(g)) –> x;0Ry). Herav følger:
x;0êMax(R,UN(Rgn(g)) = f(UN(Rgn(g))) og derfor at f(UN(Rgn(g)))≠ø. Dette viser at den første konjunkten i (+) holder. Det må imidlertid også bevises at den andre konjunkten i (+) holder. Anta derfor z er et vilkårlig element der
(5) zêf(g(0)). Fra dette og den tredje konjunkten i (1) følger:
(6) (Am)(mêDom(g) –> zêf(UN/n≤m/(g(n))))
Anta y er et vilkårlig element i UN(Rgn(g)). Da finnes k slik at yêg(k) & kêDom(g). Fra dette følger (7) yêUN/j≤k/(g(j)). Fra (6) har vi:
zêf(UN/j≤k/(g(j)) = Max(R,UN/j≤k/(g(j))). Fra dette og (7) følger zRy. Vi må også åpenbart ha at zêf(g(0)) Inkl g(0) Inkl UN(Rgn(g)). Det følger derfor at:
zêUN(Rgn(g)) & (Ay)(yêUN(Rgn(g)) –> zRy). Fra dette har man
zêMax(R,UN(Rgn(g))) = f(UN(Rgn(g)). Vi har dermed også bevist at
f(g(0)) Inkl f(UN(Rgn(g))). Dette viser at <f,Q,X> også oppfyller kravet (ix).
La oss vise at kravet (vii) er oppfylt. Anta (8) a,bêQ & f(a)≠ø & aΩf(b)≠ø. Anta z er et vilkårlig element i f(a). Da har vi zêMax(R,a) og derfor at
(9) zêa & (Ay)(yêa –> zRy). Det følger at zêaUb. Det vil derfor være nok å vise at (Ay)(yêaUb –> zRy). Anta derfor yêaUb for vilkårlig y. Er yêa har vi umiddelbart fra det at (Ay)(yêa –> zRy) at zRy. Anta (10) yêb. Nå har vi fra (8) at det finnes x;0 slik at (11) x;0êa & (Ay)(yêa –> x;0Ry). Videre har vi fra (8) at det finnes noe y;0 slik at (12) y;0êa & y;0êb & (As)(sêb –> y;0Rs). Fra (9) og (11) følger (13) zRx;0. Fra (11) og (12) følger: (14) x;0Ry;0. Fra (10) og (12) følger så y;0Ry slik at vi derfor, i lys av (13) og (14) har zRy. Dette viser at kravet (vii) er oppfylt.
La oss tilslutt vise at <f,Q,X> også oppfyller kravet (viii). Anta f(a)Ωb≠ø. Dette innebærer at det finnes en x;0 slik at:
(15) x;0êa & (Az)(zêa –> x;0Rz) & x;0êb.
Anta nå for vilkårlig z at zêf(a)Ωb. Dette impliserer:
(16) zêa &(Ay)(yêa –> zRy) & zêb. Det er nå åpenbart at zêaΩb. Vi må vise at (As)(sêaΩb –> zRs). Men dette følger åpenbart fra (16). Det følger at zêMax(R,aΩb)= f(aΩb).
Anta på den annen side for vilkårlig z at zêf(aΩb). Dette innebærer at zêMax(R,aΩb). I sin tur kan man fra dette slutte:
(17) zêaΩb & (As)(sêaΩb –> zRs). Det følger umiddelbart at zêb. For å vise at zêf(a) er det nok å vise at (At)(têa –> zRt). Anta derfor têa for vilkårlig t. Ved hjelp av (15) har man da (18) x;0Rt. Men ifølge (15) har vi x;0êaΩb. Dette og (17) impliserer zRx;0. I lys av (18) har vi derfor zRt. Men t var vilkårlig element i a. Derfor: (At)(têa –> zRt). Vi har derfor zêMax(R,a)= f(a). Dette viser at <f,Q,X> oppfyller kravet (viii). Dette avslutter beviset for Teorem 10.1. **Q.E.D.**

Vi skal nå forsøke å gi et bevis for den følgende setning:

Teorem 10.2 Anta <f,Q,X> er en P-struktur. Da gjelder:
(ER)(PO(R,X) & (Aa)(aêQ –> f(a) = Max(R,a))

Bevis: Anta <f,Q,X> er en P-struktur. Det er da lett å se at hvis man setter V= Mg(a: aêQ & f(a)≠ø) så har man Ch(<V,f>,X). (Se §6, Definisjon 6.1). Man kan da definere R på samme måte som i beviset for Teorem 6.2. Dette innebærer at man kan definere R ved:

(1.0) xRy <–> (EA;1)....(EA;n)(A;1,....,A;nêV &
Konj/j,1,n-1/(A;jΩf(A;(j+1))≠ø) & xêf(A;1) & yêA;n & x,yêX)

Anta yêX. Da har man siden <f,Q,X> er en P-struktur at det finnes en aêQ slik at yêf(a). Da har man yêa& yêf(a). I lys av definisjonen av R følger da yRy og derfor at yêDom(R). At Dom(R) Inkl X er opplagt. Vi må derfor ha Dom(R)= X. Fra beviset for Teorem 6.2 følger videre at PO(R,X) og dessuten at:

(Aa)(aêV –> f(a) = Max(R,a)). I lys av definisjonen av V er dette ekvivalent med:

(1) (Aa)(aêQ –> (f(a)≠ø –> f(a)= Max(R,a))).

Man bør nå notere at (1) er noe svakere enn det vi egentlig ønsker å vise. Hvis man nå også kan etablere:

(2) (Aa)(aêQ & f(a)=ø –> f(a) = Max(R,a))

skulle det være klart at satsen følger ved hjelp av (1) og (2). Det vil imidlertid være tilstrekkelig å bevise:

(3) (Aa)(aêQ & Max(R,a)≠ø –> f(a) = Max(R,a))

La oss vise hvordan (2) følger fra (3). Anta for reduktio at (4) aêQ & f(a)=ø og dessuten at (5) f(a)≠Max(R,a) for noe a. Ved hjelp av (3) følger da Max(R,a)=ø og vi må i så fall ha i lys av (4) at f(a)=ø=Max(R,a). Men dette strider åpenbart mot (5). Det er altså tilstrekkelig å vise at (3) holder.

Anta derfor for vilkårlig a at (6) aêQ & Max(R,a)≠ø. Det følger herav at det finnes x;0 der vi har: (7) x;0êa & (Ay)(yêa –> x;0Ry). I lys av enummere-ringsteoremet finnes det en enummerering ∂ av a, dvs. en en-entydig funksjon ∂ der Dom(∂)= k;0 for noe k;0êOn [7] og hvor Rgn(∂)=a. Vi kan også anordne det slik at ∂(0)=x;0.

I lys av kravet (x) i definisjonen av en P-struktur, og det at <f.Q,X> er en slik struktur, kan vi også ved hjelp av utvalgsaksiomet slutte at det finnes en funksjon ¥: X –> Q slik at:

(Ay)(yêX –> (yêf(¥(y)) & ¥(y)êQ)).

Vi skal nå først bevise det følgende:

(A) xêf(¥(x)) & yêf(¥(y)) & xRy. –> f(¥(x)) Inkl f(¥(x)U¥(y)).

Fra den tredje konjunkten i antesedenten i (A) følger ved hjelp av definisjonen av R at det finnes A;1,...,A;nêQ slik at:

(8) xêf(A;1)& A;1Ωf(A;2)≠ø &....& A;(n-1)Ωf(A;n)≠ø & yêA;n

Ved hjelp av de to første forutsetningene i (A) har vi da:

(9) xêf(¥(x)) & ¥(x)Ωf(A;1)≠ø & A;1Ωf(A;2)≠ø &....&
A;(n-1)Ωf(A;n)≠ø & A;nΩf(¥(y))≠ø & yêf(¥(y)).

Fra (3) og kravet (vii) i definisjonen av en P-struktur følger nå at:

(10) f(¥(x)) Inkl f(¥(x)UA;1U....UA;nU¥(y))

Nå har man f(¥(x))Ω(¥(x)U¥(y))≠ø og videre at

(11) f(¥(x))Ω(¥(x)U¥(y)) = f(¥(x)Ω(¥(x)U¥(y))) = f(¥(x)) ved hjelp av kravet (viii)

[7] "On" betegner klassen av alle ordinaltall.

i definisjonen av en P-struktur. Videre må vi ha:

(12) f(¥(x))Ω(¥(x)U¥(y)) Inkl f(¥(x)UA;1U....UA;nU¥(y))Ω(¥(x)U¥(y))

Siden f(¥(x))Ω(¥(x)U¥(y))≠ø har vi derfor at:

f(¥(x)UA;1U....UA;nU¥(y))Ω(¥(x)U¥(y))≠ø Da har vi i lys av kravet (viii) i definisjonen av en P-struktur at:

(13) f(¥(x)UA;1U....UA;nU¥(y))Ω(¥(x)U¥(y)) =
f((¥(x)UA;1U....UA;nU¥(y))Ω(¥(x)U¥(y))) = f(¥(x)U¥(y))

Fra (11), (12) og (13) følger så det vi ønsker, nemlig: f(¥(x)) Inkl f(¥(x)U¥(y)). Dette viser at (A) holder.

Man har at ∂(0)R∂(j) for alle jêDom(∂). Definer e(k) ved:

e(k) = ¥(∂(k))Ωa for kêDom(∂). Da kan man vise:

(B) a = UN/kêDom(∂)/(e(k))

For anta xêa. Da har man x=∂(r) for noe rêDom(∂). Det følger videre at: xêf(¥(∂(r))) Inkl ¥(∂(r)). Siden xêa følger ¥(∂(r))Ωa og derfor at xêUN/kêDom(∂)/(e(k)). Inklusjonen den andre veien er triviell.
Vi vil nå vise:

(C) f(e(0)) Inkl f(UN/j≤k/(e(j))) for alle kêDom(∂)

Vi gjør dette ved induksjon på k. (i) Anta k=d+1 og at påstanden holder for alle r < k. Vi har ∂(k)êf(¥(∂(k))) og at ∂(0)R∂(k). Det følger at

f(¥(∂(0))) Inkl f(¥(∂(0)) U ¥(∂(k)) ved hjelp av (A) som vi beviste ovenfor. Men f(e(0))= f(¥(∂(0))Ωa Inkl f(¥(∂(0)) U ¥(∂(k))Ωa =
f((¥(∂(0))Ωa)U(¥(∂(k))Ωa) = f(e(0)Ue(k))

Dette holder i lys av kravet (vii) til en P-struktur. Siden påstanden holder for alle r<k har vi at den holder for d. Dette innebærer at:

f(e(0)) Inkl f(UN/j≤d/(e(j))) og f(e(0)) Inkl f(e(0)Ue(d+1))

Men fra dette og (vii) i definisjonen av P-struktur følger:

f(e(0)) Inkl f(UN/j<d/(e(j)) U e(d+1)) = f(UN/j<k/(e(j)))

(ii) Er k et limes-ordinaltall følger påstanden ved hjelp av kravet (ix) i definisjonen av P-struktur. Dette viser at (C) holder.

Men fra (C), og det forhold at vi forutsetter at <f,Q,X> er en P-struktur som oppfyller kravet (ix) i definisjonen, følger: f(UN/kêDom(∂)/(e(k)))≠ø. I lys av (B) følger da f(a)≠ø. Fra dette og (1) kan vi så slutte f(a) = Max(R,a). Dette viser at (3) holder og avslutter dermed beviset for Teorem 10.2. **Q.E.D.**

§11 Avsluttende bemerkninger.

Hovedhensikten med denne andre delen av vårt arbeid har vært å utdype en del av de rent formelle egenskapene til preferanserelasjoner i streng forstand (totale preordninger) og preferanserelasjoner i videre forstand (preordninger). Dette har en viss interesse i seg selv, men det synes også å ha interesse fordi man støter på ordningsrelasjoner av denne typen på en lang rekke felter. I denne forbindelse kan det være naturlig å nevne som eksempler "minst like bra som"- relasjonen mellom handlingsalternativer som ble introdusert i Del I, samt "minst like bra som" - relasjonen mellom mulige verdener. De satsene som gjelder generelt for preferanserelasjoner vil derfor også gjelde spesielt for disse konkrete

preferanserelasjonene. De satsene vi har gitt bevis for i denne delen av arbeidet kan derfor naturlig trekkes inn hvis man ønsker å utdype konsekvensene til teorien TML som ble presentert og delvis i noen grad utviklet i Del I. Å utdype disse konsekvensene ytterligere er naturligvis en viktig oppgave.

Hovedresultatene i denne delen av arbeidet har vært de kompletthets-resultatene vi har bevist for kalkylene M, M+, M++ og M++;u. Det er disse som utgjør kjernen. De resultatene vi har vist i §7 – §10 er av en mer fragmentarisk natur. La oss avslutningsvis nevne at vi ikke har greid å løse det som ble omtalt innledningsvis som aksiomatiseringsproblemet for preordninger og preferanserelasjoner. Man får imidlertid håpe at det materialet som her har blitt tilveiebrakt kan inspirere noen til å beskjeftige seg med disse problemene og finne en løsning på dem.

****

Referanser

Chellas [1], Chellas, Brian F., *Modal Logic* , Cambridge, Cambridge University Press, 1980
Halldén [1], Halldén, Søren. *On the Logic of "Better"* Uppsala: Almqvist & Wiksells, 1957.
Hansson [1], Hansson, Bengt. "Choice structures and preference relations". *Synthese* 18 (1968), 443–458.
Hansson [2], Hansson, Bengt. "Fundamental Axioms for Preference Relations". *Synthese* 18 (1968), 423–443.
Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del I.* , Maskinskrevet manuskript, 1986
Rognes [4], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del II, Bevis for teoremer.*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [5], Rognes, Morten, *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [6], Rognes, Morten, *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [7], Rognes, Morten, *Studier i semantikk og erkjennelsesteori Del I,* Maskinskrevet manuskript, 1978
Rognes [8], Rognes, Morten, *Studier i semantikk og erkjennelsesteori Del II,* Maskinskrevet manuskript, 1978
Rognes [9], Rognes, Morten, *Teorien om presise deskriptive utsagn, modallogikk og intensjonal finstruktur.* Maskinskrevet manuskript, 1996
Rognes [10], Rognes, Morten, *Formalisering og diskusjon av en konsekvensetisk teori.* Maskinskrevet manuskript, 1996
Shoenfield [1], J. R. Shoenfield, "Mathematical Logic", Addison Wesley, 1967.